1012

ANNAES SCIENTIFICOS

DA

ACADEMIA POLYTECHNICA

DO

PORTO

ANNAES SCIENTIFICOS

DA

ACADEMIA POLYTECNICA

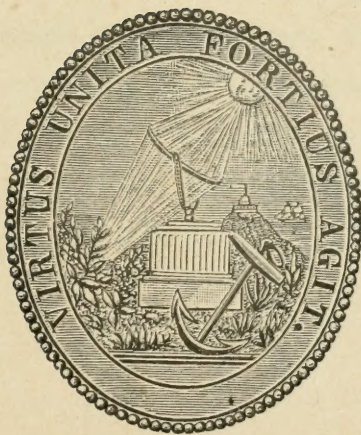
DO

PORTO

PUBLICADOS SOB A DIRECÇAO

DE

F. Gomes Teixeira

VOLUME I

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1905

A Academia Polytechnica do Porto, auctorizada por Portaria de 5 de maio de 1905, inicia hoje a publicação de uma Revista consagrada ás sciencias professadas neste estabelecimento de ensino, isto é, ás Mathematicas puras e applicadas, á Physica, á Chimica, á Historia Natural, ás Sciencias Sociaes, etc. Nesta Revista serão publicados artigos scientificos, didacticos e pedagogicos, monographias sobre capitulos das sciencias mencionadas pouco conhecidos no nosso paiz, noticias sobre o estado actual de ramos ou capitulos das mesmas sciencias, etc.

Será admittida nestes Annaes a collaboração dos homens de sciencia do nosso paiz e do extrangeiro que quizerem recorrer a elles para a publicação dos seus trabalhos.

Os *Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto* substituem, na parte relativa ás Mathematicas, o *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, cuja publicação termina. Esperamos que os geometras, que collaboraram neste jornal, honrarão com os seus trabalhos esta nova Revista.

SOBRE UMA QUESTÃO ENTRE MONTEIRO DA ROCHA E ANASTACIO DA CUNHA

POR

F. Gomes Teixeira

---

1. Na lista dos mathematicos notaveis que teve Portugal no seculo XVIII, occupam o logar primordial José Monteiro da Rocha e José Anastacio da Cunha. Foram ambos lentes na Universidade de Coimbra na occasião da celebre reforma d'esta grande instituição pelo Marquez de Pombal e foram ambos considerados pelos seus contemporaneos como homens de grande valor, conceito que a historia da sciencia portugueza confirmou. Este valor, só elles, inimigos irreconciliaveis, o não reconheciam um ao outro; e porisso quem formasse opinião a respeito d'elles pelo que cada um dizia do seu adversario, faria d'ambos juizo bem injusto.

Com o titulo de *Questão entre José Anastacio da Cunha* e *José Monteiro da Rocha* publicou o Dr. Antonio José Teixeira nos volumes XXXVIII e XXXIX do *Instituto* de Coimbra, em 1890 a 1892, um trabalho cheio de interesse, onde apresentou alguns escriptos [1] d'estes illustres geometras, nos quaes dirigem um

[1] Os escriptos considerados são: uma carta de Anastacio da Cunha dirigida a João Manoel d'Abreu, que fôra seu discipulo e que traduzira para francez os seus *Principios mathematicos;* a resposta de Monteiro da Rocha ás accusações que nella lhe foram feitas e a réplica de Anastacio da Cunha.

ao outro asperas censuras, algumas das quaes se referem ao modo de considerar certos assumptos scientificos, esclarecendo-os com commentarios muito instructivos. Entre estes assumptos figura porém um, a respeito do qual o intelligente e erudito auctor do trabalho mencionado não deu a sua opinião, e é d'esse que vamos aqui occupar-nos.

2. Uma das censuras que Anastacio da Cunha dirigiu a Monteiro da Rocha refere-se a uma emenda que este ultimo julgou dever fazer a uma passagem da Mecanica do Padre Marie, em uma traducção que publicou d'esta obra, com o fim de servir de livro de texto para o ensino d'esta sciencia na Universidade.

Occupando-se da *catenaria* correspondente ao caso em que o fio que fórma esta curva é solicitado por forças de attracção, dirigidas para um centro fixo, actuando na razão inversa do quadrado das distancias a este centro, Marie mostrou, por processos que aqui não exporemos, que a curva póde ser representada pelas equações [1]

$$x = z\cos(\theta - \varphi),\ y = z\,\mathrm{sen}\,(\theta - \varphi),$$

onde

$$(1)\qquad z = \frac{1 - m^2}{2} + \frac{1 + m^2}{2}\cos\frac{2m}{1 + m^2}\varphi,$$

$$m^2 = \frac{b + a}{b - a},$$

quando $b > a$. Quando é $b < a$, obtém-se uma outra relação entre z e φ, onde entram logarithmos, que aqui não escreveremos, por não ter de fazer uso d'ella.

Nas egualdades precedentes θ, a e b representam quanti-

---

[1] Veja-se a demonstração d'este resultado e a significação d'estas lettras no t. XXXVIII, p. 816 a 820, do *Instituto*. Sobre a significação da lettra θ, não empregada por Marie, veja-se o t. XXXIX, p. 490 a 497, do mesmo jornal.

dades constantes e z o vector do ponto cujas coordenadas são (x, y).

Depois de obter as equações da catenaria considerada, acrescentou Marie que, se fôr $b > a$ e se m fôr um numero inteiro, a curva é *algebrica;* mas Monteiro da Rocha, que traduziu esta passagem, sem a alterar, julgou dever emenda-la nas erratas, que junctou ao livro, substituindo m por $m + \frac{1}{m}$. É a esta substituição que se refere a critica de Anastacio da Cunha.

O illustre commentador do escripto de Anastacio da Cunha a que nos estamos referindo, diz na pag. 490 do t. XXXIX do *Instituto* que vae examinar esta critica com attenção; preoccupado porém com outros trabalhos, interrompeu a publicação do que se refere a este assumpto e infelizmente falleceu antes de o terminar. Julgamos porisso que não será inutil examinar aqui esta questão, bem facil aliás de resolver.

3. Ponha-se, para isso,

$$\frac{2m}{1+m^2} = \frac{\alpha}{\beta},$$

α e β representando dois numeros inteiros.

Applicando as fórmulas bem conhecidas, dadas por Euler na sua *Introductio in Analysin infinitorum:*

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \cos k\omega = \frac{1}{2} \Big\{ & (2\cos\omega)^k - \frac{k}{1}(2\cos\omega)^{k-2} \\ & + \frac{k(k-3)}{1\,2}(2\cos\omega)^{k-4} - \ldots \Big\}, \end{aligned} \right.$$

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sen} k\omega = \operatorname{sen}\omega \Big\{ & (2\cos\omega)^{k-1} - \frac{k-2}{1}(\cos\omega)^{k-3} \\ & + \frac{(k-3)(k-5)}{1.2}(2\cos\omega)^{k-5} - \ldots \Big\}, \end{aligned} \right.$$

temos, pondo primeiramente $k = \alpha$, $\omega = \frac{\varphi}{\beta}$,

$$\cos \alpha \frac{\varphi}{\beta} = \frac{1}{2} \left\{ \left(2 \cos \frac{\varphi}{\beta}\right)^{\alpha} - \frac{\alpha}{1}\left(2 \cos \frac{\varphi}{\beta}\right)^{\alpha-2} \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha(\alpha-3)}{1.2}\left(2 \cos \frac{\varphi}{\beta}\right)^{\alpha-4} - \dots \right\},$$

e depois, pondo $k = \beta$, $\omega = \frac{\varphi}{\beta}$,

$$\text{sen}\, \varphi = \text{sen}\, \beta \frac{\varphi}{\beta} = \text{sen} \frac{\varphi}{\beta} \left\{ \left(2 \cos \frac{\varphi}{\beta}\right)^{\beta-1} - \frac{\beta-2}{1}\left(2 \cos \frac{\varphi}{\beta}\right)^{\beta-3} \right.$$
$$\left. + \frac{(\beta-3)(\beta-5)}{1.2}\left(2 \cos \frac{\varphi}{\beta}\right)^{\beta-5} - \dots \right\},$$

$$\cos \varphi = \cos \beta \frac{\varphi}{\beta} = \frac{1}{2} \left\{ \left(2 \cos \frac{\varphi}{\beta}\right)^{\beta} - \frac{\beta}{1}\left(2 \cos \frac{\varphi}{\beta}\right)^{\beta-2} \right.$$
$$\left. + \frac{\beta(\beta-3)}{1.2}\left(2 \cos \frac{\varphi}{\beta}\right)^{\beta-4} - \dots \right\}.$$

Substituindo estes desenvolvimentos nas expressões

$$x = \left[\frac{1-m^2}{2} + \frac{1+m^2}{2} \cos \frac{\alpha}{\beta} \varphi\right] \left[\cos \theta \cos \varphi + \text{sen}\, \theta\, \text{sen}\, \varphi\right]$$

$$y = \left[\frac{1-m^2}{2} + \frac{1+m^2}{2} \cos \frac{\alpha}{\beta} \varphi\right] \left[\text{sen}\, \theta \cos \varphi - \cos \theta\, \text{sen}\, \varphi\right],$$

vem um resultado de fórma

$$x = A_1 \left(\cos \frac{\varphi}{\beta}\right)^{\alpha+\beta} + A_2 \left(\cos \frac{\varphi}{\beta}\right)^{\alpha+\beta-1} + \cdot\cdot$$

$$+ \operatorname{sen} \frac{\varphi}{\beta} \left\{ B_1 \left(\cos \frac{\varphi}{\beta}\right)^{\alpha+\beta-1} + B_2 \left(\cos \frac{\varphi}{\beta}\right)^{\alpha+\beta-2} + \ldots \right\},$$

$$y = a_1 \left(\cos \frac{\varphi}{\beta}\right)^{\alpha+\beta} + a_2 \left(\cos \frac{\varphi}{\beta}\right)^{\alpha+\beta-1} + \ldots$$

$$+ \operatorname{sen} \frac{\varphi}{\beta} \left\{ b_1 \left(\cos \frac{\varphi}{\beta}\right)^{\alpha+\beta-1} + b_2 \left(\cos \frac{\varphi}{\beta}\right)^{\alpha+\beta-2} + \ldots \right\},$$

onde A_1, $A_2, \ldots$, B_1, $B_2, \ldots$, a_1, $a_2, \ldots$, b_1, $b_2, \ldots$ representam quantidades constantes.

Por meio d'estas equações vê-se já que a curva é algebrica, quando $\frac{2m}{1+m^2}$ é um numero *racional*, visto que, eliminando as quantidades $\cos \frac{\varphi}{\beta}$ e $\operatorname{sen} \frac{\varphi}{\beta}$ entre estas equações e a equação

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{\beta} + \cos^2 \frac{\varphi}{\beta} = 1,$$

vem uma relação algebrica entre x e y.

Podemos mostrar ainda que a curva é n'este caso *unicursal*. Basta para isso notar que, pondo

$$\operatorname{sen} \frac{\varphi}{\beta} = \frac{t^2-1}{t^2+1},$$

vem

$$\cos\frac{\varphi}{\beta} = \frac{2t}{t^2+1},$$

e que, substituindo estes valores nas expressões precedentes de x e y, vem um resultado de fórma

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

onde $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ representam funcções racionaes de t.

Vê-se pois, em conclusão, que a curva é algebrica quando m é inteiro, como dizia Marie, e quando $m + \frac{1}{m}$ é inteiro, como pensava Monteiro da Rocha, pois que, em ambos estes casos, $\frac{2m}{1+m^2}$ é racional. É, em geral, algebrica em todos os casos em que m é raiz de uma equação de fórma

$$\alpha(m^2+1) - 2\beta m = 0,$$

α e β representando numeros inteiros; e portanto em todos os casos em que m é racional e em alguns casos em que é irracional.

Monteiro da Rocha, substituindo m por $m + \frac{1}{m}$, commetteu o erro de julgar falsa a passagem considerada da Mecanica de Marie, quando não o era; mas Anastacio da Cunha, dando como *absurda* [1] a substituição que fez Monteiro da Rocha, parece

[1] As palavras com que Anastacio da Cunha se refere a esta substituição são as seguintes: Podia lembrar-se do que lhe succedeu com a equação de catenaria na sua *Traducção da Mechanica* do Abbade Marie; do absurdo que imprimiu nas erratas presumindo que emendava o auctor.

considerar esta substituição como erronea, quando era apenas inopportuna.

4. Uma questão que se apresenta muito naturalmente é procurar o caminho que seguiu Monteiro da Rocha, para demonstrar que a curva considerada é algebrica, quando $m + \frac{1}{m}$ é um numero inteiro. Este caminho não póde coincidir com o precedente, porque, se coincidisse, não teria certamente este habil geometra deixado de reconhecer que o theorema tem logar no caso geral de $m + \frac{1}{m}$ ser racional.

Para que a catenaria considerada seja algebrica é necessario que entre $\operatorname{sen} \varphi$, $\cos \varphi$ e $\cos \frac{2m}{m^2+1} \varphi$ exista uma relação algebrica, e porisso, para achar os casos em que a curva é algebrica, é indispensavel recorrer ás fórmulas (2) e (3) ou a outras equivalentes a estas, que são bem conhecidas, e que determinam $\operatorname{sen} k\omega$ e $\cos k\omega$ em funcção de $\operatorname{sen}\omega$ e de $\cos\omega$, ou só em funcção d'uma d'estas quantidades. Porisso, obter o resultado geral ou apenas um resultado particular depende do modo como se empregarem estas formulas. Provavelmente Monteiro da Rocha usou d'ellas de um modo que, se não é identico ao que vamos expôr, não differirá essencialmente d'elle.

Escreva-se a equação (1) do modo seguinte:

$$(4) \qquad z = \frac{1-m^2}{2} + (1+m^2)\left[\cos^2 \frac{m}{1+m^2}\varphi - \frac{1}{2}\right],$$

e, pondo

$$\cos\varphi = \cos\frac{1+m^2}{m}\cdot\frac{m}{1+m^2}\varphi, \quad \operatorname{sen}\varphi = \operatorname{sen}\frac{1+m^2}{m}\cdot\frac{m}{1+m^2}\varphi,$$

appliquem-se a estas funcções as fórmulas (2) e (3), tomando

$$k = \frac{1+m^2}{m}, \quad \omega = \frac{m}{1+m^2}\varphi.$$

Teremos

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left\{\left(2\cos\frac{m}{1+m^2}\varphi\right)^k - \frac{k}{1}\left(2\cos\frac{m}{1+m^2}\varphi\right)^{k-2} + \ldots\right\}.$$

$$\operatorname{sen}\varphi = \operatorname{sen}\frac{m}{1+m^2}\varphi\left\{\left(2\cos\frac{m}{1+m^2}\varphi\right)^{k-1}\right.$$

$$\left. - \frac{k-2}{1}\left(\cos\frac{m}{1+m^2}\varphi\right) + \ldots\right\}.$$

Substituindo estes valores de $\cos\varphi$ e $\operatorname{sen}\varphi$ nas expressões de x e y, e eliminando depois $\operatorname{sen}\frac{m}{1+m^2}\varphi$, $\cos\frac{m}{1+m^2}\varphi$ e z entre as equações que assim se obtêem, a equação (4) e as equações

$$\operatorname{sen}^2\frac{m}{1+m^2}\varphi + \cos^2\frac{m}{1+m^2}\varphi = 1,$$

obtém-se uma equação algebrica, em que só entram x e y. A analyse porém que precede só é applicavel quando o valor $\frac{1+m^2}{m}$, que se deu a k, para applicar as fórmulas (2) e (3), é inteiro, isto é quando é inteiro o binomio $m+\frac{1}{m}$. Seguindo pois este caminho, demonstra-se o resultado particular obtido por Monteiro da Rocha; não se demonstra porém o theorema geral.

Pelo que respeita ao modo de applicar as fórmulas (2) e (3) que levou Marie á conclusão de que a curva é algebrica, quando m é inteiro, parece-nos provavel que faria primeiramente $k = 2m$ e $\omega = \frac{\varphi}{1+m^2}$ e depois $k = 1 + m^2$, $\omega = \frac{\varphi}{1+m^2}$.

5. Antes de terminar este artigo, notaremos ainda que a equação (1) mostra que a catenaria considerada é a *concoide* das

curvas representadas pela equação, em coordenadas polares,

$$\rho = \frac{1 + m^2}{2} \cos \frac{2m}{1 + m^2} \varphi,$$

chamando, como alguns auctores, concoide de uma curva o logar geometrico dos pontos que se obtêem tomando sobre os vectores dos seus pontos, a partir da curva dada, segmentos de egual comprimento. As curvas representadas por esta ultima equação chamam-se *rosaceas*, e foram estudadas pela primeira vez por Guido-Grandi em um opusculo intitulado *Flores geometrici ex rhodenearum et claeliarum curvarum descriptione resultantes*, publicado em Florença em 1728. Podem vêr-se as propriedades d'ellas na nossa *Geometria de las curvas notables, tanto planas como alabiadas*, publicada pela Academia Real das Sciencias de Madrid.

SUR LES SÉRIES NEUMANNIENNES DE FONCTIONS SPHÉRIQUES.

PAR

NIELS NIELSEN
(Professeur à l'Université de Copenhague)

---

§ 1. Formules générales relatives à $P^{\nu,n}(x)$

Designons par ν un nombre fini quelconque, différent de zéro, il est évident que la puissance

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\nu},$$

où x est une quantité finie quelconque, est une fonction holomorphe de α, pourvu que

$$|\alpha| < |x \pm \sqrt{x^2 - 1}|;$$

c'est-à-dire que nous obtenons, pour de telles valeurs de α, une série de puissances comme suit

$$(1) \qquad (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\nu} = \sum_{s=0}^{s=\infty} P^{\nu,s}(x) \cdot \alpha^s,$$

où le coefficient général $P^{\nu,s}(x)$ est un polynome entier du de-

gré n et par rapport à x et par rapport à ν; nous aurons en effet

$$(2) \qquad P^{\nu,n}(x) = \frac{1}{\mu(\nu)} \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s \Gamma(\nu+n-s)}{s!\,(n-2s)!} (2x)^{n-2s}.$$

Supposons particulièrement $\nu = \frac{1}{2}$; nos polynomes $P^{\nu,n}(x)$ deviendront identiques aux fonctions sphériques de première espèce, souvent appellées polynomes de LEGENDRE, savoir

$$P^{\frac{1}{2},n}(x) = P^n(x);$$

c'est pourquoi nous proposons pour les $P^{\nu,n}(x)$ le nom *fonctions sphériques généralisées.*

La formule générale (1), qui est due à JACOBI (¹), nous donne sans peine une suite de propriétés fondamentales de $P^{\nu,n}(x)$. Posons par exemple $\nu = 1$ et $x = \cos\theta$; nous aurons sans peine

$$(4) \qquad P^{1,n}(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta};$$

différentions ensuite par rapport à ν les deux membres de (1), l'hypothèse $\nu = 0$ donnera de même

$$(5) \qquad \lim_{\nu=0} \left(\Gamma(\nu)\, P^{\nu,n}(\cos\theta)\right) = \frac{2\cos n\theta}{n}, \quad n \geq 1.$$

De plus, posons pour abréger

$$\omega = |x \pm \sqrt{x^2-1}| - \delta,$$

(¹) *Journal de Crelle*, t. 56, p. 149; 1859. *Werke*, t. 6, p. 184.

où il faut prendre la plus petite des deux valeurs absolues qui figurent au second membre, tandis que δ désigne une quantité positive, aussi petite qu'on veut, mais d'une grandeur assignable; la formule (1) donnera immédiatement l'inégalité

$$(6) \qquad |\alpha^n P^{\nu,n}(x)| < k_n \cdot \left(\frac{|\alpha|}{\omega}\right)^n,$$

où k_n est un nombre positif qui restera fini, même pour n infini.

Un grand nombre de géomètres ont étudié les fonctions $P^{\nu,n}(x)$; nous nous bornerons à indiquer ici l'extension due à feu M. Gegenbauer [1] d'un théorème de M. C. Neumann [2] à Leipsig concernant les polynomes de Legendre, savoir ce théorème général:

Supposons que la série de puissances

$$(7) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

ait son rayon de convergence r *plus grand que l'unité; nous aurons ce développement en série de fonctions* $P^{\nu,n}(x)$:

$$(8) \qquad f(x) = \Gamma(\nu) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (2\nu + 2s) A_s \cdot P^{\nu,s}(x),$$

série dont le domaine de convergence est l'intérieur de l'ellipse qui a son grand axe égal à $(r + r^{-1})$ *et ses foyers dans les points* $(\pm 1,0)$.

Dans ce qui suit nous désignons toujours par $E(r)$ l'ellipse de convergence de la série (8).

Il est digne de remarque que la série *neumannienne* (8) con-

---

(1) *Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, t. 75; 1877.

(2) *Ueber die Entwickelung einer Funktion mit imaginärem Argument nach der Kugelfunktionen erster und zweiter Art.* Halle, 1862.

tient le paramètre quelconque ν, ce qui nous sera très utile bientôt.

Quant aux coefficients A_n qui figurent dans (8), on les exprime ordinairement sous forme des intégrales définies, expressions qui sont très incommodes pour une étude approfondie des séries *neumanniennes;* c'est pourquoi je substitue au lieu des intégrales susdites la série infinie suivante:

$$(9)\qquad A_n = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(n+2s)!\, a_{n+2s}}{s!\, \Gamma(\nu+n+s+1)\, 2^{n+2s+1}}.$$

§ 2. Développement de $P^{\rho,n}(x)$.

Comme une première application du théorème général que nous venons d'énoncer, considérons la série finie obtenue, en vertu de (8), pour la fonction $P^{s,n}(x)$.

A cet effet, appliquons la formule de GAUSS

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\, \Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\, \Gamma(\gamma-\beta)};$$

un simple calcul donnera la formule cherchée

$$(10)\qquad P^{\rho,n}(x) = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\rho)} \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s(\nu+n-2s)\Gamma(\rho+n-s)}{\Gamma(\nu+n-s+1)} \cdot \binom{\nu-\rho}{s} \cdot P^{\nu,n-2s}(x),$$

qui est nouvelle, je le crois; il est évident que (10) est applicable pour une valeur finie quelconque de x.

Déduisons maintenant de (10) une suite de formules plus particulières et très connues. Posons d'abord $\rho = 0$, $\rho = 1$ et

$x = \cos\theta$; les formules (4) (5) donnent respectivement

$$(11)\qquad \frac{2\cos(n\theta)}{n} = \Gamma(\nu)\sum_{s=0}^{\leqq\frac{n}{2}} \frac{(-1)^s(\nu+n-2s)(n-s-1)!}{\Gamma(\nu+n-s+1)}\cdot\binom{\nu}{s}\cdot P^{\nu,n-2s}(\cos\theta),$$

$$(12)\qquad \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = \Gamma(\nu)\cdot\sum_{s=0}^{\leqq\frac{n}{2}} \frac{(-1)^s(\nu+n-2s)(n-s)!}{\Gamma(\nu+n-s+1)}\cdot\binom{\nu-1}{s}\cdot P^{\nu,n-2s}(\cos\theta);$$

posons particulièrement dans (12) $\nu = 0$, nous obtenons une formule trigonométrique élémentaire très connue, tandis que (11) donnera pour $\nu = \frac{1}{2}$ une formule trouvée déjà par Legendre [1] et Laplace [1].

Pour obtenir les formules inverses de (11) et (12), mettons dans (10) $\nu = 0$, $\nu = 1$; nous aurons respectivement, en vertu de (4) et (5),

$$(13)\qquad P^{\rho,n}(\cos\theta) = (-1)^n\cdot\sum_{s=0}^{\leqq\frac{n}{2}} E_{n-2s}\cdot\binom{-\rho}{s}\binom{-\rho}{n-s}\cdot\cos(n-2s)\theta$$

$$(14)\qquad P^{\rho,n}(\cos\theta) = (-1)^n\cdot\sum_{s=0}^{\leqq\frac{n}{2}} \frac{n-2s+1}{n-s+1}\cdot\binom{1-\rho}{s}\binom{-\rho}{n-s}\cdot\frac{\sin(n-2s+1)\theta}{\sin\theta},$$

où il faut poser dans (13) $E_0 = 1$, et $E_s = 2$ pour $s \geqq 1$. Posons dans (13) $\rho = \frac{1}{2}$; nous obtenons une formule bien con-

---

[1] Voir M. Waugerin dans l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* t. II, p. 702; 1904.

nue [1], tandis que l'hypothèse $\varrho = 1$ donnera la même formule élémentaire que (12) pour $\nu = 0$.

Appliquons ensuite l'identité

$$D_x P^{\nu,n}(x) = 2\nu \,.\, P^{\nu+1,n-1}(x),$$

qui est une conséquence immédiate de (1), puis mettons dans (10) $\varrho = \nu + p$, où p désigne un entier positif; nous aurons

$$(15) \qquad D_x^p P^{\nu,n+p}(x) = 2^p \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^\nu (\nu+n-2s)\Gamma(\nu+n+p-s)}{\Gamma(\nu+n-s+1)} \cdot \binom{-p}{s} \cdot P^{\nu,n-2s},$$

dont le cas particulier $p = 1$, $\nu = \frac{1}{2}$ est dû à Christoffel [2].

Revenons maintenant à la formule générale (10), puis introduisons la fonction auxiliaire

$$\Gamma_n(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n^x}{x(x+1) \cdots (x+n-1)},$$

où n désigne un entier positif, de sorte que nous aurons

$$\lim_{n=\infty} \Gamma_n(x) = \Gamma(x).$$

Cela posé, les identités évidentes

$$\Gamma(x+n) = x(x+1) \cdots (x+n-1)\,\Gamma(x)$$

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1) \cdots (x-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}$$

---

(1) Wangerin, loc. cit., p. 707. Heine, *Handbuch der Kugelfunktionen*, t. I, § 20.

(2) *Dissertation*. Berlin, 1856. M. E. Bauer dans le *Journal de Crelle*, t. 56, p. 101; 1859.

donnent

$$\Gamma(x+n) = (n-1)!\, n^x \cdot \frac{\Gamma(x)}{\Gamma_n(x)},$$

$$\binom{x}{n} = \frac{(-1)^n n^{-x-1}}{\Gamma_n(-x)};$$

désignons ensuite par ω le même nombre que figure dans (6), il résulte, en vertu de (10), l'inégalité suivante

$$(16) \qquad |\alpha^n P^{\nu,n}(x)| < \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} k_{n,s} \cdot \left|\frac{\alpha}{\omega}\right|^{n-2s} \cdot |\alpha|^{2s},$$

où $k_{n,s}$ désigne un nombre positif qui restera fini, même pour n ou s infinis.

§ 3. Série neumannienne obtenue pour $f(\alpha x)$.

Pour donner une application plus générale du théorème énoncé dans le § 1, considérons la série de puissances

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$

dont le rayon de convergence r n'est pas égal à zéro, puis désignons par α une nombre fini, tel que $|\alpha| < r$; nous aurons une série neumannienne de la forme suivante :

$$(17) \qquad f(\alpha x) = \Gamma(\nu) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (2\nu + 2s)\, A^{\nu,s}(\alpha)\, P^{\nu,s}(x),$$

où nous avons posé pour abréger

$$(18) \qquad A^{\nu,n}(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(n+2s)!\, a_{n+2s}}{s!\, \Gamma(\nu+n+s+1)} \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n+2s},$$

et la série (17) est convergente à l'intérieur de l'ellipse $E\left(\frac{r}{|\alpha|}\right)$.

Supposons particulièrement $r > 1$, puis mettons dans (17) $\alpha = 1$; nous aurons

$$(19) \qquad A^{\nu,n}(1) = A_n,$$

où A_n désigne le coefficient général qui figure au second membre de (8).

Quant aux fonctions $A^{\nu,n}(\alpha)$, que nous avons à étudier maintenant, démontrons d'abord que la série de puissances que figure au second membre de (18) a son rayon de convergence égal à r au moins. A cet effet, introduisons la fonction $\Gamma_n(x)$, puis appliquons l'identité évidente

$$(n+2s) < 2^{n+2s};$$

nous aurons

$$(20) \qquad \left|\frac{(n+2s)!\, a_{n+2s}}{s!\, \Gamma(\nu+n+s+1)} \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n+2s}\right| < |\Gamma_{n+s+1}(\nu)\ (n+s+1)^{-\nu}| \cdot |a_{n+2s} \cdot \alpha^{n+2s}|.$$

Mettons ensuite $\alpha_0 = r - \delta$, où δ désigne une quantité positive, aussi petite qu'on le veut, mais d'une grandeur assignable, puis mettons

$$(21) \qquad |\Gamma_{n+s+1}(\nu)\,(n+s+1)^{-\nu}\, a_{n+s}\, \alpha_0^{n+2s}| \leqq k_n,$$

pour $s = 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$; il est évident que la quantité posi-

tive k est finie, même pour n infini, parce que r est le rayon de convergence de la série de puissances $f(x)$,

Or, les deux inégalités (20) (21) donnent immédiatement, en vertu de (18), la valeur majorante

$$(22) \qquad |A^{\nu,n}(\alpha)| < \frac{k_n}{1 - \left|\frac{\alpha}{\alpha_0}\right|} \cdot \left|\frac{\alpha}{\alpha_0}\right|^n, \quad |\alpha| < r.$$

Cela posé, revenons à la formule (17), puis chercheons dans ses deux membres les termes qui contiennent comme facteur la puissance x^n; nous aurons, en vertu de (2), ce développement d'une seule puissance de α en série de fonctions $A^{\nu,n}(\alpha)$:

$$(23) \quad a_n \alpha^n = \frac{2^{n+1}}{n!} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s (\nu+n+2s) \Gamma(\nu+n+s)}{s!} \cdot A^{\nu,n+2s}(\alpha),$$

série qui est valable, pourvu que $|\alpha| < r$, comme le montre clairement l'inégalité (22).

Remplaçons ensuite dans (17) ν par ρ, ce qui donnera

$$(24) \qquad f(\alpha x) = \Gamma(\rho) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (2\rho + 2s) A^{\rho,s}(\alpha) P^{\rho,s}(x),$$

puis introduisons au lieu de toutes les fonctions $P^{\rho,s}(x)$ qui figurent au second membre de (24) les expressions correspondantes tirées de (10); nous aurons une série à double entrée Δ. dont les séries horizontales sont formées par les développements obtenus de (10), séries dont le type général est

$$(25) \quad h_s = \Gamma(\nu)(2\rho + 2s) A^{\rho,s}(\alpha) \cdot \sum_{r=s}^{\leq \frac{s}{2}} \frac{(-1)^r (\nu+s-2r) \Gamma(\rho+s-r)}{\Gamma(\nu+s-r+1)} \cdot \binom{\nu-\rho}{r} P^{\nu,s-2r}(x),$$

et nous aurons

$$\Delta = h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + \cdots$$

Écrivons maintenant les termes des séries h_n, de sorte que ceux qui contiennent la même fonction $P^{\nu,n}(x)$, savoir les termes

$$(26)\quad r_n = P^{\nu,n}(x)\cdot\Gamma(\nu)(2\nu+2n)\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s(\rho+n+2s)\cdot\frac{\Gamma(\rho+n+s)}{\Gamma(\nu+n+s+1)}\cdot\binom{\nu-\rho}{s}\cdot A^{\nu,n+2s}(\alpha)$$

forment les séries verticales de Δ.

Cela posé, supposons $|\alpha| < r\,|x \pm \sqrt{x^2-1}|$; les formules (16) et (22) montrent clairement que les séries h_s sont, pour s infini, convergentes comme une série de puissances et que c'est la même chose pour r_n, même pour n infini; c'est-à-dire qu'il est permis de ranger dans un ordre quelconque les termes de Δ, ce qui donnera par exemple

$$\Delta = r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + \cdots,$$

série qui doit être identique à (17), terme à terme, parce que les séries *neumanniennes* ne permettent aucun développement de zéro.

Supposons maintenant n fini; la formule (2) montre clairement que la série r_n est convergente comme une série de puissances, pourvu que $|\alpha| < r$, ce qui donnera la proposition suivante:

Pour le coefficient $A^{\nu,n}(\alpha)$ qui figure dans la série neumannienne (17) nous aurons ce développement remarquable

$$(27)\quad A^{\nu,n}(\alpha) = \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s(\rho+n+2s)\Gamma(\rho+n+s)}{\Gamma(\nu+n+s+1)}\cdot\binom{\nu-\rho}{s}\cdot A^{\rho,n+2s}(\alpha),$$

convergent pourvu que $|\alpha| < r$, tandis que $f(x)$ est une fonction quelconque, holomorphe pourvu que $|x| < r$.

Comme une application d'une portée assez étendue, différentions p fois par rapport à ν, terme à terme, la série (8), ce qui est permis; nous aurons

$$f^{(p)}(x) = 2^p \cdot \Gamma(\nu + p) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (2\nu + 2p + 2s) A_{p+s} \cdot P^{\nu+p,s}(x),$$

d'où, en mettant dans (27) $\rho = \nu + p$ et $\alpha = 1$, ce corollaire de la proposition précédente:

Pour la dérivée d'ordre p de la série neumannienne (8) *nous aurons ce développement en série du même genre:*

$$(28) \qquad f^{(p)}(x) = 2^p \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (2\nu + 2s)\, A_s^{(p)} \cdot P^{\nu,s}(x),$$

valable où l'est la série donnée (8), et où il faut admettre

$$(28\text{ bis}) \qquad A_n^{(p)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s(\nu+n+p+2s)\Gamma(\nu+n+p+s)}{\Gamma(\nu+n+s+1)} \binom{-p}{s} A_{n+p+2s}.$$

Le cas particulier $p = 1$ est très élégant.

§ 4. Exemples. Les fonctions $J_\nu(x)$ et $Q^{\nu,\rho}(x)$.

Comme un premier exemple de la théorie que nous venons de développer, considérons la série *neumannienne* obtenue pour $P^{\sigma,n}(\alpha x)$, série qui deviendra finie. Posons pour abréger

$$(29) \qquad p_s^{\nu,\sigma}(\alpha) = \frac{\Gamma(\sigma+n-s)\alpha^{n-2s}}{s!\,\Gamma(\nu+n-2s+1)} \cdot F(\sigma+n-s, -s, \nu+n-s+1, \alpha^2),$$

où F désigne la série hypergéométrique ordinaire; nous aurons, en vertu de (18),

$$(30)\quad P^{\sigma,n}(\alpha x)=\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\sigma)}\cdot\sum_{s=0}^{\leq\frac{n}{2}}(-1)^s(\nu+n-2s)\,p_s^{\nu,\sigma}(\alpha)\cdot P^{\nu,n-2s}(x),$$

d'où

$$A^{\nu,n-2s}(\alpha)=\frac{(-1)^s}{2\Gamma(\sigma)}\cdot p_s^{\nu,\sigma}(\alpha),$$

de sorte que les formules générales (23) et (27) donnent ici respectivement

$$(31)\quad \frac{\Gamma(\sigma+n-s)}{s!}\cdot\alpha^{n-2s}=\sum_{r=0}^{r=s}(-1)^r(\nu+n-2r)\Gamma(\nu+n-s-\nu)p_r^{\nu,\sigma}(\alpha)$$

$$(32)\quad p_s^{\nu,\sigma}(\alpha)=\sum_{r=0}^{r=s}(\rho+n-2\nu)\,\frac{\Gamma(\rho+n-s-\nu)}{\Gamma(\nu+n-s-r+1)}\cdot\binom{\nu-\rho}{s-r}\cdot p_r^{\nu,\sigma}(\alpha),$$

développements qui sont valables pour une valeur finie quelconque de α.

Remarquons en passant que la formule (30) nous permet de généraliser la formule (27). A cet effet, développons $f(\alpha\beta x)$, à l'aide de (17), en série de fonctions $P^{\nu,n}(x)$ et en série de fonctions $P^{\rho,n}(\beta x)$; la même procédé que nous venons d'appliquer dans le passage de (24) à (17) nous conduira, en vertu de (30), à la formule cherchée, qui ne présente qu'un intérêt plus médiocre. On trouvera du reste une formule de ce genre dans mon *Traité des fonctions cylindriques* [1].

---

[1] *Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen*; Leipzig, 1904, p. 275.

Comme deuxième exemple développons la fonction $e^{\alpha x i}$; nous aurons, en vertu de (18),

$$A^{\nu,n}(\alpha) = \frac{i^n}{2} \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-\nu} J^{\nu+n}(x),$$

où $J^\nu(\alpha)$ désigne la fonction cylindrique de première espèce, savoir

$$J^\nu(\alpha) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\nu+2s}}{s!\,\Gamma(\nu+s+1)};$$

la série *neumannienne* correspondante

$$(33) \qquad e^{\alpha x i} = \frac{\Gamma(\nu)}{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} i^s (\nu+s) J^{\nu+s}(\alpha) P^{\nu,s}(x)$$

est convergente pour des valeurs finies quelconques de x et de α.

La série générale (33) est due à Gegenbauer [1], tandis le cas particulier $\nu = \frac{1}{2}$ appartient à M. Bauer [2].

La forme même de $A^{\nu,n}(\alpha)$ montre clairement qu'il suffit appliquer les formules (23) et (27) dans le cas particulier $n=0$; nous aurons ces deux formules très connues [3].

$$(34) \qquad \left(\frac{\alpha}{2}\right)^\nu = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\nu+2s)\,\Gamma(\nu+s)}{s!} \cdot J^{\nu+2s}(\alpha),$$

$$(35) \quad \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\rho-\nu} J^\nu(\alpha) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\rho+2s)\,\Gamma(\rho+s)}{\Gamma(\nu+s+1)} \cdot \binom{\nu-\rho}{s} \cdot J^{\rho+2s}(\alpha),$$

valables pour une valeur finie quelconque de α.

---

(1) (2) Loc. cit., p. 277; dans la formule (2) il faut lire au second membre $\Gamma(\nu)$ au lieu de $\Gamma(\nu+1)$.

(3) Loc. cit. pp. 273, 275.

Étudions comme dernier exemple la fonction

$$(1-\alpha x)^{-\nu-\sigma} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \binom{\nu+\sigma+s-1}{s} \alpha^s x^s, \quad r=1;$$

un simple calcul donnera, en vertu de (**18**),

$$A^{\nu,n}(\alpha) = \frac{\Gamma(\nu+\sigma+n)}{2^{n+1}\Gamma(\nu+\sigma)\Gamma(\nu+n+1)} \cdot F\left(\frac{\nu+\sigma+n}{2}, \frac{\nu+\sigma+n+1}{2}, \nu+n+1, \alpha^2\right).$$

Introduisons maintenant la *fonction métaphérique*

$$Q^{a,b}(y) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(b+2a)y^{-b-2a}}{2^{b+1}\;\Gamma(a+b+1)} \cdot F\left(\frac{b+2a}{2}, \frac{b+2a+1}{2}, a+b+1, \frac{1}{y^2}\right);$$

nous aurons dans ce cas

$$A^{\nu,n}(\alpha) = \frac{2^{\nu-\sigma}\,\alpha^{-\nu-\sigma}}{\sqrt{\pi}\;\Gamma(\nu+\sigma)} \cdot Q^{\sigma,\nu-\sigma+n}\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

d'où finalement

$$(36) \quad (1-\alpha x)^{-\nu-\sigma} = \frac{\Gamma(\nu)2^{\nu-\sigma}\alpha^{-\nu-\sigma}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\sigma)} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (2\nu+2s) Q^{\sigma,\nu-\sigma+s}\left(\frac{1}{\alpha}\right) \cdot P^{\nu,s}(x),$$

formule qui est due à Gegenbauer [1].

Je me reserve de revenir dans une autre occasion á la série

---

[1] *Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, t. 100; 1891.

neumannienne (36) qui donne, comme cas particuliers, des généralisations de certains développements de JACOBI et de HEINE.

Quant à l'application des formules (23) et (27), il suffit étudier le cas $n=0$: posons $\alpha=\frac{1}{y}$ et $\nu+\sigma$, $\rho+\sigma$ ou lieu de ν et ρ respectivement; nous aurons ces deux développements

$$(37) \quad y^{-\rho-2\sigma}=\frac{2^{\rho+1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\sigma)}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s(\rho+\sigma+2s)\Gamma(\rho+\sigma+s)}{s!}\cdot Q^{\sigma,\rho+2s}(y)$$

$$(38) \quad (2y)^{\nu-\rho}Q^{\sigma,\nu}(y)=\frac{\Gamma(\nu+2\sigma)}{\Gamma(\rho+2\sigma)}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s(\rho+\sigma+2s)\Gamma(\rho+\sigma+s)}{\Gamma(\nu+\sigma+s+1)}\binom{\nu-\rho}{s}Q^{\sigma,\rho+2s}(y),$$

qui sont convergents, pourvu que $|y|>1$.

L'analogie parfaite entre les deux groupes de formules (34) (35) et (37) (38) est très intéressante, ce me semble; or, notre point de vue général met en pleine lumière la raison d'une telle analogie.

Quant à la formule (38), elle est d'une portée assez étendue, à cause des trois paramètres quelconques ν, ρ et σ qu'elle contient. En effet, posons $\rho=0$, $\sigma=\frac{1}{2}$, nous trouvons des développements d'une fonction conique et d'une fonction annulaire en séries de fonctions sphériques ordinaires de seconde espèce.

Dans le cas particulier $\rho=\nu+n$, où n désigne un entier positif, les séries qui figurent aux seconds membres de (35) et (38) diviendront des séries finies.

Copenhague, le 26 janvier 1905.

Roberto Duarte Silva

Off. do Commercio do Porto

A OBRA SCIENTIFICA E A VIDA DO CHIMICO PORTUGUEZ ROBERTO DUARTE SILVA

POR

A. J. FERREIRA DA SILVA

Em terra extranha, que lhe foi sempre amiga, e que elle honrou com os primores de um caracter nobre e levantado, com o exemplo do cumprimento rigoroso do seu dever, com o amor ao trabalho que chegava até o sacrificio, e com as manifestações brilhantes de seu talento, que o fazem collocar em logar de honra na galeria dos chimicos modernos — dorme o seu ultimo somno, num dos cemiterios de Paris, á sombra da memoria de collegas dedicados, de alguns mestres eminentes da chimica, e de amigos que elle adquiriu pela sua inquebrantavel lealdade — um portuguez dos mais illustres.

ROBERTO DUARTE SILVA se chama elle.

Entre os mestres illustres a que o nome do nosso compatriota se acha ligado, sobresae FRIEDEL, que o associou a si em pesquisas importantes, entre as quaes merece primasia a synthese total da glycerina. Já deste homem notavel, que exerceu influencia sobre a marcha da sciencia, esbocei a obra scientifica, logo apoz o seu fallecimento: era um dever de amizade e de gratidão que a isso me compellia [1].

---

[1] *Noticia sobre a vida e os trabalhos scientificos de* CHARLES FRIEDEL, por A. J. FERREIRA DA SILVA. Coimbra, 1899, 1 op. de 24 pag.

Ao serem inaugurados os *Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto* nenhum assumpto mais interessante me occorreu do que este, de fazer conhecida entre nós a obra chimica do nosso compatriota. Honrou-me FRIEDEL com subidas provas de affecto e estima; e não me honrou menos o meu nobre patricio, de quem guardo affectuosa correspondencia, sem haver tido a dita de com elle tratar pessoalmente. É ainda a saudade pelo amigo, o apreço pelas suas levantadas qualidades, e a gratidão á sua honrada memoria que me levam a render-lhe esta homenagem de respeito.

Fique assim sellada por uma homenagem commum a amizade que a ambos tinha — ao mestre e ao discipulo.

Tambem FRIEDEL honrou a memoria de ROBERTO SILVA, escrevendo para o *Boletim da Sociedade de chimica de Paris* uma noticia ([1]) sobre a vida e os trabalhos do seu amigo. A minha noticia não faz, porém, duplo emprego com a do illustre mestre: é mais pormenorisada e é mais elementar, digamos assim, para que os estudantes portuguezes a possam bem comprehender; mas, por isso mesmo, é mais modesta!

Complete assim, tambem o mais modesto e o menos auctorisado dos tres, e que sobreviveu aos seus amigos, o cyclo de affectos que em vida os ligaram!

PRIMEIRA PARTE

I

Não obstante a sua naturalidade — ROBERTO DUARTE SILVA nasceu em Cabo Verde — quasi toda a vida scientifica se desenrolou em França. Na segunda parte deste estudo veremos as causas determinantes deste facto, e contaremos como tendo estado algum tempo em Lisboa, onde completou o seu curso de Pharmacia, e depois alguns annos em Macau, o nosso illustre patricio passou a Paris em 1862, onde fixou a sua residencia,

([1]) *Notice sur la vie et les travaux de* R. D. SILVA, par M. FRIEDEL, 1 op. de XIX pag. (*Bulletin de la Société chimique de Paris*, 1888).

para estudar a bella sciencia para que tinha revelado singular predilecção, desde a sua mocidade, e ouvir as lições dos mestres eminentes cujas obras elle apreciava no seu trabalho humilde de todos os dias, antes de os conhecer.

Roberto Duarte Silva, iniciando a sua obra scientifica em 1867 no laboratorio de Wurtz, quis prestar um serviço ao seu paiz: as primicias do seu lavor chimico consagrou-as á sua patria e ao seu torrão natal, estudando dois productos de Cabo Verde — um producto do reino mineral e um oleo vegetal —, que lá se podem explorar em larga escala, e que ambos se achavam na exposição universal de Paris de 1867.

*

O primeiro era uma *arêa preta,* procedente de Santiago de Cabo Verde.

Foi essa arêa o objecto de uma nota publicada naquelle anno [1].

A arêa em questão era em parte attrahida pela barra magnetica, e R. Silva computa em cerca de 55 % a porção magnetica.

Esta é, na maior parte, soluvel no acido chlorhydrico concentrado, com excepção de 1,20 % constituida por esmeril. A parte soluvel, composta principalmente por 52,5 % de ferro e 21,46 % de acido titanico, é formada de ferro titanado $TiO^2,FeO + nFe^2O^3$, com um pouco de magnesia (2,13 %) e de alumina (na proporção de 2,20 %).

A parte não magnetica, menos densa e sem os granulos brilhantes de aspecto metallico que se encontram na outra, é menos soluvel no acido chlorhydrico. Depois da fusão com o carbonato de sodio, tratada pelo acido chlorhydrico, deixou residuo consideravel, constituido não só por silica, que se dissolveu na potassa caustica, como por uma substancia insoluvel n'este alcali, e no acido chlorhydrico, na proporção de 29,72 %, e que á analyse se revelou formada por esmeril (alumina e ferro), na proporção de 15,12 %, e acido titanico ou rutilo, na cifra de 11,60 %. Emquanto aos 70,28 % restantes, são formados por silicato de

---

(1) *Comptes-Rendus,* t. LXV, du 29 juillet 1867, pag. 207.

calcio e aluminio (46,15 %), com magnesia (0,50) e traços de manganez, associado a 23,46 % de ferro titanato.

Em 100 partes da arêa, tal qual se encontra na natureza, existem de

Acido titanico.......	20,45
Ferro...........................	35,00

Por isso, parecia a R. Silva que a arêa em questão tinha um certo interesse scientifico, e poderia ser materia prima para uma industria muito importante, por causa da riqueza em acido titanico e ferro.

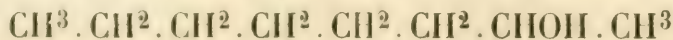
«Se, como penso (dizia Silva ao terminar), esta variedade de arêa preta se encontrar em grande abundancia na mór parte das ilhas de Cabo Verde, poderá ser objecto d'uma exploração muito importante. Dando os resultados das minhas analyses, faço votos para que as minhas previsões se realisem, e serei feliz, na continuação das minhas averiguações, fazendo reverter em proveito da meu paiz as indicações scientificas que os meus estudos me tiverem suggerido».

*

De entre as plantas da familia de Euphorbiaceas, ha muitas que fornecem oleos fixos, mais ou menos complexos, entre os quaes os mais conhecidos são os do ricino e de croton.

Nas ilhas do archipelago de Cabo Verde existe em abundancia uma planta, da mesma familia, descripta por Adanson no meado do seculo XVIII, a que os indigenas dão o nome de *purgueira*, — o *Curcas purgans*. Do fructo desta planta extrahem-se quantidades consideraveis dum oleo fixo, dotado das mesmas propriedades physiologicas que o oleo de ricino, mas mais exageradas.

Tinha um chimico francez, o sr. Bouis, demonstrado que o oleo de ricino, destillado com a potassa, dava *alcool octylico secundario* (*methylhexylcarbinol, octanol 2*):

$$CH^3 . CH^2 . CH^2 . CH^2 . CH^2 . CH^2 . CHOH . CH^3$$

Alcool octylico secundario.

Pensou R. Silva que o oleo de purgueira, analogo ao de ricino e procedente da mesma familia vegetal, poderia tambem

ser aproveitado como fonte do alcool octylico. Utilisando, pois, as pequenas amostras do oleo que estavam na exposição portugueza, submetteu á destillação o sabão potassico do oleo de purgueira. Obteve assim um liquido complexo, movel dotado de cheiro aromatico e grato; e submettendo o producto á destillação fraccionada, recolhendo a porção que passava a 178-180°, e sujeitando-a á analyse (C. . .73,65; H. . .13,91; O. . .12,44) reconheceu que, de facto, a composição d'este producto era do alcool octylico, e que os caracteres do liquido eram exactamente os do alcool que Bouis extrahira do oleo de ricino.

Estavam assim, confirmadas pela experiencia as suas previsões.

O alcool octylico não é uma substancia sem interesse: é um dos melhores dissolventes das materias gordas e das resinas, e poderá ser empregado para o fabrico de vernizes. O copal tenro dissolve-se neste alcool com a maior facilidade; e o copal duro, que dá tanto trabalho a utilisar, tambem nelle acaba por dissolver-se. Póde ainda servir na illuminação para substituir com vantagem a agua-raz ou os oleos de alcatrão do gaz, com a vantagem de não ter cheiro desagradavel, nem de se inflammar, ou de produzir misturas explosivas, ao contacto de uma vela. Os seus etheres são usados na confeitaria e perfumaria [1]. E, por isso, o trabalho de R. Silva tem real interesse e utilidade.

Entre os productos volateis da destillação da mistura do oleo e de potassa encontrou R. Silva o ammoniaco, o que o levou a inferir que o oleo de purgueira tinha quantidade notavel de azoto; e, de facto, a analyse elementar do oleo permittiu-lhe fixar a quantidade de azoto do oleo em 6,1 $^0/_0$.

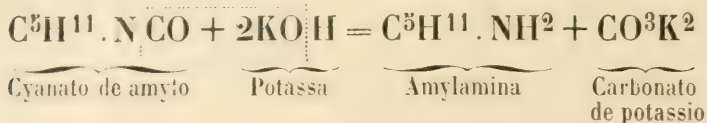
*

É tambem pela mesma epocha que elle enceta os primeiros vôos em pesquisas originaes de chimica organica, occupando-se da formação das *amylaminas*, ou aminas do alcool amylico, da propylamina normal e da preparação do oxydo de triethylphosphina.

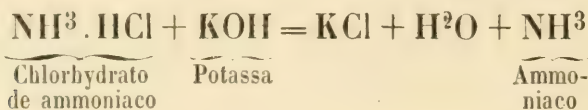
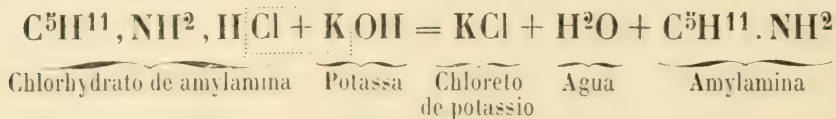
---

[1] Bouis (Jules) — *Recherches chimiques sur l'huile de ricin et sur l'alcool caprylique qui en résulte.* (Thèses présentées à la Faculté des sciences de Paris). Paris, 1855, pag. 31.

Para obter a amylamina $C^5H^{11}.NH^2$ recorreu R. **Silva** ao processo de **Wurtz**, que consiste em decompor pela potassa caustica o cyanato de amylo:

$$\underbrace{C^5H^{11}.NCO}_{\text{Cyanato de amylo}} + \underbrace{2KOH}_{\text{Potassa}} = \underbrace{C^5H^{11}.NH^2}_{\text{Amylamina}} + \underbrace{CO^3K^2}_{\text{Carbonato de potassio}}$$

Saturando o producto d'esta reacção pelo acido chlorhydrico diluido, obtem-se o chlorhydrato da base, com o qual facilmente se obtem a base no estado livre, decompondo-o pela potassa, reacção parallela á da libertação do ammoniaco dos seus saes:

$$\underbrace{C^5H^{11},NH^2,HCl}_{\text{Chlorhydrato de amylamina}} + \underbrace{KOH}_{\text{Potassa}} = \underbrace{KCl}_{\text{Chloreto de potassio}} + \underbrace{H^2O}_{\text{Agua}} + \underbrace{C^5H^{11}.NH^2}_{\text{Amylamina}}$$

$$\underbrace{NH^3.HCl}_{\text{Chlorhydrato de ammoniaco}} + \underbrace{KOH}_{\text{Potassa}} = KCl + H^2O + \underbrace{NH^3}_{\text{Ammoniaco}}$$

Julgava-se até R. **Silva** que o unico producto obtido quando se decompunha o chlorhydrato de amylamina bruto pela potassa secca era a monoamylamina; e essa noção achava-se então consagrada nos tratados classicos de chimica, e particularmente no de **Gerhardt** (1).

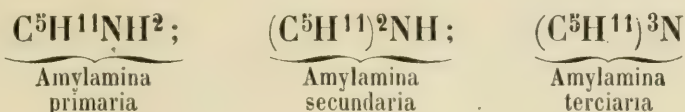
R. **Silva**, estudando com attenção o producto da reacção da potassa sobre o chlorhydrato de amylamina impuro, notou que elle não era homogeneo (2); e, sujeitando-o a uma destillação fraccionada, mostrou que com elle se obtem primeiro a *monoamylamina*, que passa a 95°, á pressão de 758^{mm}; mas, continuando a aquecer, passa a 178-180° um liquido incolor, oleoso, de

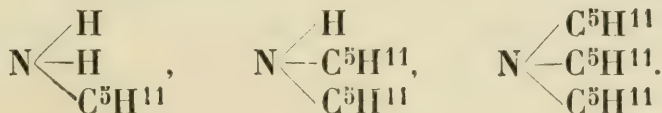
(1) Gerhardt, *Traité de chimie organique*; Paris, 1854, t. II, pag. 696-697.

(2) Gerhardt, no seu Tratado de chimica organica, *loc. cit.*, falando da decomposição do chlorhydrato de amylamina pela potassa diz que — «*quando a reacção está terminada, se encontra no recipiente um liquido muito alcalino, algumas vezes separado em duas camadas, e donde é facil extrahir a amylamina, saturando-a pelo acido chlorhydrico*»; mas não explica a razão da apparição das duas camadas.

cheiro ammoniacal, quasi insoluvel na agua e soluvel no alcool e no ether; e, procedendo á analyse d'elle, reconheceu que era constituido por *diamylamina* $(C^5H^{11})^2NH$, que elle caracterisou pela sua transformação em chloroplatinato e chloroaurato; e ainda, proseguindo a destillação, passava acima de 200° (proximo a 205°) uma nova base, que se parecia com a diamylamina no aspecto, cheiro e quasi insolubilidade na agua, solubilidade no alcool e no ether; mas tendo a composição da *triamylamina* $(C^5H^{11})^5N$.

Assim, conclue Silva, quando se decompõe o producto bruto da reacção da potassa sobre o chlorhydrato da amylamina, obtido pelo methodo geral e classico de Wurtz, não se obtem unicamente uma amaina primaria, mas simultaneamente a amina secundaria e terciaria, isto é, os tres corpos:

$$\underbrace{C^5H^{11}NH^2}_{\text{Amylamina primaria}}; \quad \underbrace{(C^5H^{11})^2NH}_{\text{Amylamina secundaria}}; \quad \underbrace{(C^5H^{11})^3N}_{\text{Amylamina terciaria}}$$

que hoje, em notação atomica, se representam:

$$N\begin{cases}H\\H\\C^5H^{11}\end{cases}, \quad N\begin{cases}H\\C^5H^{11}\\C^5H^{11}\end{cases}, \quad N\begin{cases}C^5H^{11}\\C^5H^{11}\\C^5H^{11}\end{cases}.$$

Não succederá a mesma cousa com a maior parte das outras bases pertencentes ao grupo dos ammoniacos compostos? pergunta R. Silva ao terminar.

O facto, em realidade, dá-se e foi confirmado mais tarde por A. W. Hofmann; e a sua descoberta revela as qualidades de investigador do auctor. «Desde este seu primeiro trabalho, diz Friedel, graças a um estudo consciencioso e attento de todos os productos da reacção, R. Silva consegue descobrir factos que tinham escapado aos outros observadores. Todas as suas investigações apresentam as mesmas qualidades de cuidado e observação minuciosa».

Dois annos mais tarde, em 1869, occupou-se Roberto Duarte Silva do estudo da *propylamina*, obtida a partir do iodeto de propylo C^3H^7I, que Wurtz lhe cedera, e que havia sido preparado por Isidore Pierre a partir do alcool propylico de fermen-

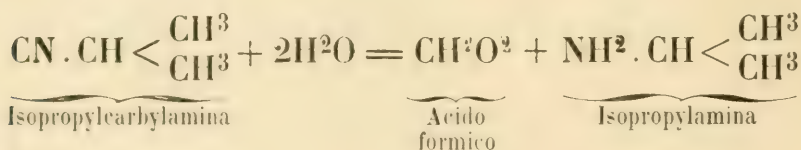
tação (1). Este iodeto ferve a 102.° Transforma-se pela reacção sobre o cyanato de prata em cyanato de propylo, e este é decomposto pela potassa; a propylamina $C^3H^7.NH^2$, produzida nestas condições, converte-se em chlorhydrato, e este sal secco, decomposto pela baryta anhydra, gera uma amina, que, pela analyse elementar, reconheceu ser a *propylamina primaria:*

$$C^3H^7.I \rightarrow C^3H^7.CNO \rightarrow C^3H^7.NH^2,HCl \rightarrow C^3H^7.NH^2$$

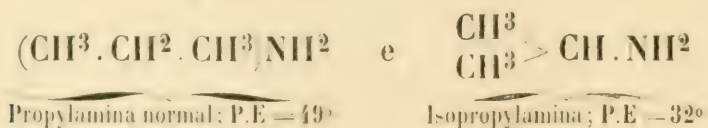
Pôde assim obter uma base organica, fervendo a 49°, e que não só por este caracter, como pelo aspecto e forma crystalina do seu chloroplatinato parecia ser identica á base que foi obtida por Mendius (2), fazendo reagir o hydrogenio nascente sobre o cyaneto de ethylo:

$$\underbrace{CN.C^2H^5}_{\text{Cyaneto de ethylo}} \rightarrow \underbrace{NH^2.C^3H^7}_{\text{Propylamina primaria}}$$

Esta amina differia da sua isomera — a *isopropylamina*, preparada por Gautier, em 1868, na acção da agua fortemente acidulada pelo acido chlorhydrico sobre a isopropylcarbylamina (3)

$$\underbrace{CN.CH<^{CH^3}_{CH^3}}_{\text{Isopropylcarbylamina}} + 2H^2O = \underbrace{CH^2O^2}_{\text{Acido formico}} + \underbrace{NH^2.CH<^{CH^3}_{CH^3}}_{\text{Isopropylamina}}$$

não só pelo ponto de ebullição, que para esta é 31°,5-32°,5, como pelo aspecto e forma crystallina do seu chloroplatinato.

Os dois corpos são representados na moderna notação pelas formulas seguintes:

$$\underbrace{CH^3.CH^2.CH^2.NH^2}_{\text{Propylamina normal; P.E = 49°}} \quad e \quad \underbrace{{}^{CH^3}_{CH^3}>CH.NH^2}_{\text{Isopropylamina; P.E = 32°}}$$

(1) *Comptes rendus*, t. LXIX (1869), pag. 473.
(2) *Annalen der Chemie und Pharmacie*, t. CXXI, pag. 129, 1862.
(3) *Comptes rendus*, t. LXVII (1868), pag. 725.

A tranquillidade do paiz onde tinha começado a ser acolhido com tanta benevolencia por WURTZ, em cujo laboratorio fez os trabalhos que acabamos de apontar, ía ser perturbada. Surge o anno terrivel e os desastres da guerra franco-prussiana. R. SILVA, que se achava, na occasião, em Londres e voltou a Paris ao conhecimento dos primeiros desastres, volta pelo conselho de amigos para Londres; e ahi encontra outro chimico, que em França fôra tambem recebido com apreço, o sr. J. M. CRAFTS. Com elle realisa no laboratorio do prof. WILLIAMSON um trabalho sobre a preparação e propriedades do *oxydo de triethylphosphina*, que apparece no Boletim da Sociedade chimica de França, em 1871 ([1]).

A triethylphosphina $P(C^2H^5)^3$, pela primeira vez preparada por CAHOURS e HOFMANN na acção do zinco-ethylo sobre o trichloreto de phosphoro, é um liquido incolor, muito movel, menos pesado que a agua, fervente a 127°,5 (pressão de 744^{mm} numa atmosphera de hydrogenio), e que tem a propriedade de se combinar com o oxygenio á temperatura ordinaria; o que explica a elevação de temperatura e os vapores brancos que se formam quando ella se expõe ao ar, dando o phenomeno algumas vezes até origem á combustão do producto.

Para preparar o oxydo de triethylphosphina $P(C^2H^5)^3O$, que tal é o corpo que se forma na reacção, utilisavam-se os residuos solidos da preparação da ethylphosphina, que se depunham na extremidade dos tubos das retortas e nos balões de condensação.

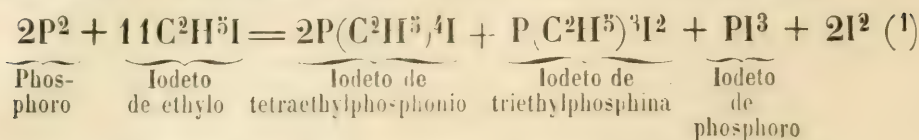
ROBERTO DUARTE SILVA, em collaboração com CRAFTS, indicou um methodo muito mais exacto ([2]) de preparar o dicto corpo, e que consiste em aquecer o phosphoro (1 p.) com o iodeto de ethylo (30 p.) durante 24 horas, á temperatura de 175-180°; o conteudo do tubo é depois destillado com alcool forte, para expulsar o iodeto de ethylo; e o residuo, misturado com potassa caustica (4 p.), é destillado e em seguida rectificado.

Na primeira parte da reacção, formam-se os iodetos de ethyl-

([1]) *Bulletin de la Société chimique de Paris,* t. XVI, pag. 43.
([2]) *A very good method,* dizem ROSCOE e SCHORLEMMER, no seu *A treatise on chemistry,* vol. III, part I, pag 435.

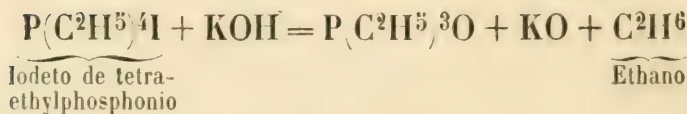
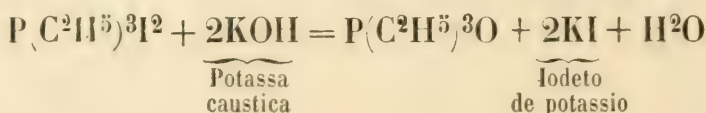
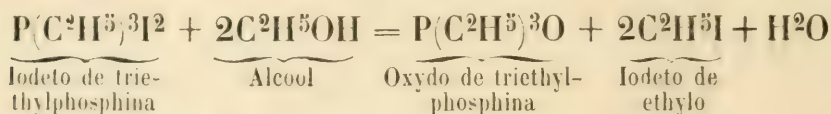
phosphonio e de triethylphosphina, segundo as equações:

$$\underbrace{2P^2}_{\text{Phosphoro}} + \underbrace{11C^2H^5I}_{\text{Iodeto de ethylo}} = \underbrace{2P(C^2H^5)^4I}_{\text{Iodeto de tetraethylphosphonio}} + \underbrace{P(C^2H^5)^3I^2}_{\text{Iodeto de triethylphosphina}} + \underbrace{PI^3}_{\text{Iodeto de phosphoro}} + 2I^2 \ (^1)$$

$$\underbrace{PI^3}_{\text{Iodeto de phosphoro}} + \underbrace{2P(C^2H^5)^4I}_{\text{Iodeto de tetraethylphosphonio}} + \underbrace{C^2H^5I}_{\text{Iodeto d'ethylo}} = \underbrace{3P(C^2H^5)^3I^2}_{\text{Iodeto de triethylphosphina}}. \ (^2)$$

Na segunda parte forma-se iodeto de ethylo; e a destillação dos iodetos com potassa dá o oxydo de triethylphosphina:

$$\underbrace{P(C^2H^5)^3I^2}_{\text{Iodeto de triethylphosphina}} + \underbrace{2C^2H^5OH}_{\text{Alcool}} = \underbrace{P(C^2H^5)^3O}_{\text{Oxydo de triethylphosphina}} + \underbrace{2C^2H^5I}_{\text{Iodeto de ethylo}} + H^2O$$

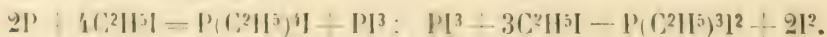
$$P(C^2H^5)^3I^2 + \underbrace{2KOH}_{\text{Potassa caustica}} = P(C^2H^5)^3O + \underbrace{2KI}_{\text{Iodeto de potassio}} + H^2O$$

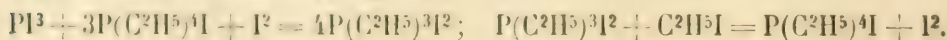
$$\underbrace{P(C^2H^5)^4I}_{\text{Iodeto de tetraethylphosphonio}} + KOH = P(C^2H^5)^3O + KO + \underbrace{C^2H^6}_{\text{Ethano}}$$

O oxydo de trethylphosphina crystallisa em longas agulhas brancas, que são muito deliquescentes, e soluveis em todas as proporções no alcool e na agua; funde a 51°,6 e ferve a 243°, segundo as determinações de Silva e Crafts, que modificaram um tanto as anteriores de Hofmann; e, coisa singular, apesar de tão complexo, é um corpo extremamente estavel, não sendo atacado mesmo quando aquecida com acido azotico.

II

O alcool propylico secundario, que fôra obtido por Friedel em 1862, por hydrogenação da acetona, era um corpo interessante, cujo conhecimento era ainda incompleto; importava, es-

(1) Resumo das equações:

$$2P + 4C^2H^5I = P(C^2H^5)^4I + PI^3; \quad PI^3 + 3C^2H^5I = P(C^2H^5)^3I^2 + 2I^2.$$

(2) Resumo das duas equações:

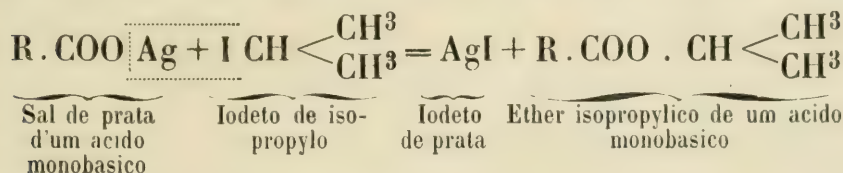
$$PI^3 + 3P(C^2H^5)^4I + I^2 = 4P(C^2H^5)^3I^2; \quad P(C^2H^5)^3I^2 + C^2H^5I = P(C^2H^5)^4I + I^2.$$

pecialmente, estudar os seus derivados etheres — os *etheres do isopropylo* — e compara-los com os etheres do alcool propylico normal ou primario.

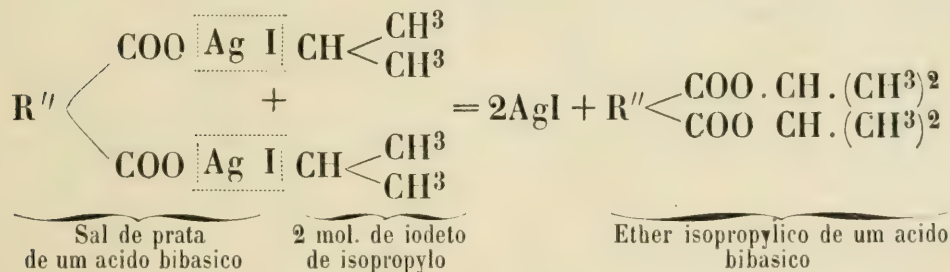
Este é o primeiro trabalho de conjuncto que tomou sobre si R. Duarte Silva, trabalho que iniciou em 1869.

Preparou primeiro o butyrato e valerato de isopropylo [1]; e depois o succinato, butyrato, o azotito e o azotato de isopropylo [2], e por ultimo o phenato de isopropylo e muitos dos seus derivados bromados [3], o formiato, o lactato, o cyanato e o cyanurato de isopropylo [4].

O methodo empregado foi o chamado methodo dos saes de prata de Wurtz, que consiste em fazer reagir os iodetos alcoolicos — n'este caso o iodeto de isopropylo — sobre os saes de prata dos acidos.

No caso de acidos monobasicos a reacção formula se assim:

$$\underbrace{R.COO\,Ag}_{\text{Sal de prata d'um acido monobasico}} + \underbrace{I\,CH<^{CH^3}_{CH^3}}_{\text{Iodeto de isopropylo}} = \underbrace{AgI}_{\text{Iodeto de prata}} + \underbrace{R.COO\,.\,CH<^{CH^3}_{CH^3}}_{\text{Ether isopropylico de um acido monobasico}}$$

No caso do acido ser bibasico:

$$\underbrace{R''\left\langle{COO\,Ag \atop COO\,Ag}\right.}_{\text{Sal de prata de um acido bibasico}} + \underbrace{{I\,CH<^{CH^3}_{CH^3} \atop I\,CH<^{CH^3}_{CH^3}}}_{\text{2 mol. de iodeto de isopropylo}} = 2AgI + \underbrace{R''<^{COO\,.\,CH\,.\,(CH^3)^2}_{COO\;\;CH\,.\,(CH^3)^2}}_{\text{Ether isopropylico de um acido bibasico}}$$

Indicando, com toda a precisão de experimentador cuidadoso, as condições de preparação d'estes corpos, fixou as suas propriedades e particularmente as constantes physicas dos etheres obtidos, que foram determinadas no laboratorio do professor Desains e sob a sua direcção. Eis a summula dos dados adquiridos em relação aos etheres mais importantes.

---

[1] *Sur quelque composés isopropyliques : butyrate et valérate de isopropyle,* C. R., t. LXVIII, pag. 1476-1478.

[2] *Sur quelque composés isopropyliques : Succinate, benzoate, azotite, et azotate d'isopropyle,* C. R. t. LXIX, pag. 416.

[3] *Bulletin de la Société chimique de Paris,* t. XIII, pag. 27-32.

[4] *Idem,* t. XVII, pag. 97.

Quadro dos etheres do isopropylo

estudados por R. D. SILVA — (1869)

Nomes	Formula chimica	Estado physico	Densidade	Ponto de ebullição	Indice de ref.
Butyrato de isopropylo	$C^4H^7O^2 . CH<^{CH^3}_{CH^3}$	Liquido	0,8787	128°	1,393
Valerato de isopropylo	$C^5H^9O^2 . CH<^{CH^3}_{CH^3}$	»	0,8358	142°	1,397
Succinato de isopropylo	$C^4H^4O^4 \left(CH<^{CH^3}_{CH^3}\right)^2$	»	1,009	228°	1,418
Benzoato de isopropylo	$C^7H^5O^2 . CH<^{CH^3}_{CH^3}$	»	1,054	218°	1,496
Azotito de isopropylo	$NO^2 . CH<^{CH^3}_{CH^3}$	»	0,856	45°	—
Azotato de isopropylo	$NO^3 . CH<^{CH^3}_{CH^3}$	»	1,054	101°-102°	1,391

Notou R. D. SILVA que de todos estes etheres um só, o azotito de isopropylo, se decompõe em presença de um carbonato alcalino, e que, quando é humido, tambem se desdobra em presença do chloreto de calcio, dando origem a um desenvolvimento de gaz chlorhydrico; de sorte que, para purificar este azotito, deve lavar-se rapidamente com um leite de cal, e depois ser sêcco sobre o nitrato de calcio fundido e pulverisado.

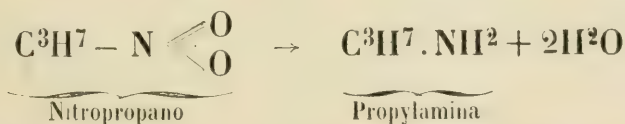
Tambem observou, ao preparar o ether butyrico, que no começo da operação havia um pequeno desenvolvimento de propyleno ([1]), e, como consequencia d'isto, forma-se um pouco de acido butyrico, que acompanha o ether que destilla.

Pouco depois de SILVA ter preparado o azotito de isopropylo pelo methodo de WURTZ, um chimico allemão V. MEYER, levando mais longa a reacção, destillando o producto a banho de oleo, em vez de banho-maria, como SILVA tinha empregado, obteve o *nitropropano*.

Os dois corpos são metameros; mas o corpo estudado por SILVA é um verdadeiro ether, e que, como todos os etheres-saes, é hydrolysado pelos alcalis causticos, formando um alcool e um nitrito; e pela acção do hydrogenio se transforma em alcool e ammoniaco:

$$C^3H^7.O.NO \rightarrow C^3H^7.OH + K.ONO \rightarrow C^3H^7.OH + NH^3 + H^2O$$

O nitropropano não é tal, hydrolysado pela potassa, e dissolve-se n'ella sem decomposição; por meio dos reductores transforma-se na propylamina:

$$\underbrace{C^3H^7 - N \begin{matrix} \nearrow O \\ \searrow O \end{matrix}}_{\text{Nitropropano}} \quad \rightarrow \quad \underbrace{C^3H^7.NH^2 + 2H^2O}_{\text{Propylamina}}$$

Como se vê pela explicação acima, no ether nitroso, a ligação do carbono com o azoto faz-se por intermedio do oxygenio; nas nitroparaffinas, como no nitropropano, o azote está directamente ligado ao carbono.

([1]) *Comptes rendus, loco cit.*, pag. 1477.

Estas nitroparaffinas fervem geralmente a uma temperatura muito mais elevada que os ethers nitrosos metalicos.

Diz o Sr. Friedel que R. Silva teve pesar em haver deixado escapar a descoberta de *nitropropano*, que V. Meyer fazia conhecida tres annos depois, em 1872, e que veiu a ser utilisada para a diagnose differencial dos alcooes primarios, secundarios e terciarios.

Todas estas pesquizas foram feitas no Laboratorio de Wurtz.

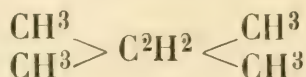
III

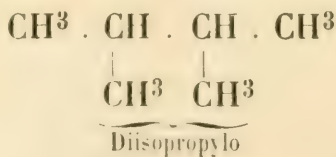
Um outro grupo de trabalhos originaes de R. Silva é o do isopropylo e seus derivados

O *diisopropylo* C^6H^{14}:

$$(CH^3)^2 . CH . CH (CH^3)^2,$$

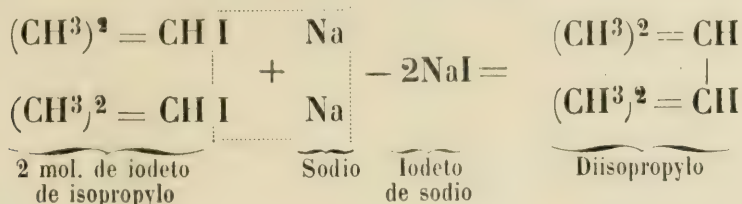
que é o *tetramethylethano symetrico* :

$$\begin{matrix} CH^3 \\ CH^3 \end{matrix} > C^2H^2 < \begin{matrix} CH^3 \\ CH^3 \end{matrix}$$

e que tambem se pode considerar como o derivado dimethylico de butano, o 2,3-*dimethylbutano* :

$$\underbrace{\begin{matrix} CH^3 . & CH & . & CH & . CH^3 \\ & | & & | & \\ & CH^3 & & CH^3 & \end{matrix}}_{\text{Diisopropylo}}$$

estava para o radical isopropylo, cujos compostos já tinham por elle sido estudados, como estava o ethano $C^2H^6 = CH^3 . CH^3$ para o radical *methylo* CH^3-ou o butano $C^4H^{10} = C^2H^5 . C^2H^5$ para o radical ethylo C^2H^5 -.

D'ahi o proposito de R. Silva de estudar os processos de preparação do diisopropylo. Effectivamente, reconheceu que elle se forma quando se faz actuar sobre o ether isopropyliodhydrico não só o sodio, como o amalgama de sodio, e a prata dividida.

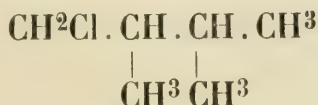
A reacção dá-se conforme o mechanismo geral da ligação de dois radicaes monovalentes, que se formam pela eleminação de um atomo de iodo a cada uma de duas moleculas do corpo gerador, mechanismo que WURTZ e outros chimicos tinham utilisado:

$$\underbrace{\begin{matrix}(CH^3)^2 = CH\,I \\ (CH^3)^2 = CH\,I\end{matrix}}_{\text{2 mol. de iodeto de isopropylo}} + \underbrace{\begin{matrix}Na \\ Na\end{matrix}}_{\text{Sodio}} - \underbrace{2NaI}_{\text{Iodeto de sodio}} = \underbrace{\begin{matrix}(CH^3)^2 = CH \\ | \\ (CH^3)^2 = CH\end{matrix}}_{\text{Diisopropylo}}$$

A reacção, que fôra estudada já por SCHORLEMMER, foi melhor illucidada por R. SILVA; os dois agentes — iodeto de isopropylo e sodio — fazem-se actuar em presença do ether; mas o ataque não se dá se o ether fôr perfeitamente anhydro, é indispensavel que elle esteja levemente humido.

Fazendo em seguida reagir o chloro sobre o diisopropylo á luz do sol, na ausencia de iodo, obteve dois derivados chlorados isomeros $C^6H^{13}Cl$.

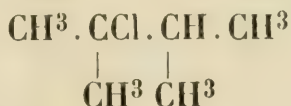
Um é o que hoje se denomina:

2,3-*dimethyl*-1-*chlorobutano*:

$$\begin{matrix}CH^2Cl\,.\,CH\,.\,CH\,.\,CH^3 \\ \quad\quad\;\; | \quad\;\; | \\ \quad\quad CH^3\;CH^3\end{matrix}$$

corpo liquido, fervendo a 124°, e, que como a formula indica, é derivado chlorado primario:

O outro é o que se denomina actualmente:

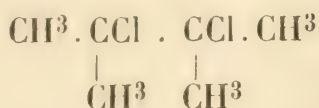
2,3-*dimethyl*-2-*chlorobutano*:

$$\begin{matrix}CH^3\,.\,CCl\,.\,CH\,.\,CH^3 \\ \quad\quad | \quad\;\; | \\ \quad CH^3\;CH^3\end{matrix}$$

tambem liquido, fervendo a 118°, e derivado terciario.

Tambem obteve na mesma reacção um corpo bichlorado,

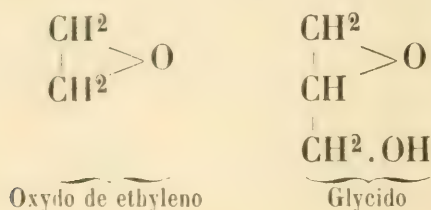
que é o dichlorohexano $C^6H^{12}Cl^2$, ou melhor *dichlorodiisopropylo*, ao qual se dá hoje a formula do derivado biterciario [1], considerando-o como:

2,3-*dimethyl*-2,3-*dichlorobutano:*

$$\begin{array}{l} CH^3.CCl\ .\ CCl.CH^3 \\ \quad\ \ | \qquad\quad | \\ \quad CH^3 \quad CH^3 \end{array}$$

É um corpo solido e crystallisado, e funde a 160°.

Este derivado dichlorado, tratado pelo acetato de prata, dá o respectivo ether diacetico, cuja saponificação não fornece um glycol, como se podia esperar; mas sim um um anhydrido d'esse glycol, uma especie de ether-oxydo, comparavel ao oxydo de ethyleno C^2H^4O ou ao glycido $C^3H^6O^2$, representados pelas formulas de constituição:

$$\begin{array}{l} CH^2 \\ \ |\quad >O \\ CH^2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} CH^2 \\ \ |\quad >O \\ CH \\ \ | \\ CH^2.OH \end{array}$$

Oxydo de ethyleno — Glycido

O corpo obtido por R. Silva é o:

Oxydiisopropylo, isomero do *oxyhexano* (*oxydo de hexyleno*) $C^6H^{12}O$. e derivado do diisopropylo; é um liquido, fervente a 185°. É tambem isomero da *pinacolina*, *methylpseudobutylacetona* ou *dimethylbutanona* $(CH^3).CO.C(CH^3)^3$, que ferve a 106° e se obtem por meio da pinacona, destillando-a com acido sulfurico diluido, ou por outros meios ainda [1].

Tambem obteve um derivado bibromado, o *dibromodiisopropylo* $C^6H^{12}Br^2$; e ainda um novo carboneto saturado em C^9, a que chamou:

Pentamethylbutano C^9H^{20}, que é hoje designado pelo nome

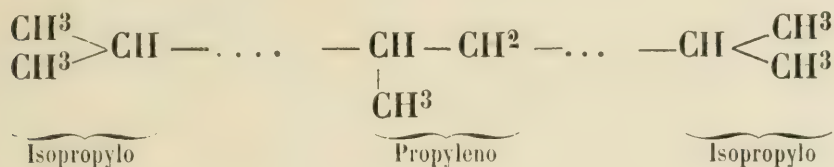
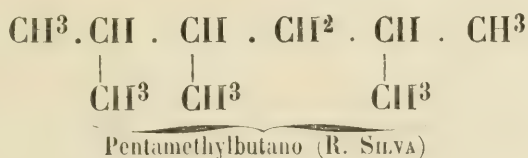
---

(1) *Ergänzungsbände zur dritten Auflage des* Beilstein's *Handbuchs der organischen Chemie von P.* Jacobson, t. I, pag. 36 e 510.

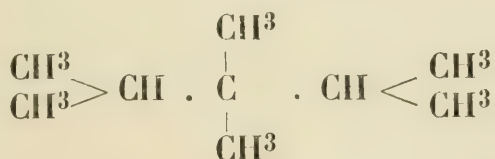
de 2,3,5-*trimethylhexano*, e que se fórma, conjuntamente com pequena quantidade de diisopropylo, propano e propyleno, aquecendo o iodeto de isopropylo com amalgama de sodio ([1]).

Para comprehender a formação d'este carboneto, deve imaginar-se a associação de dois radicaes isopropylos a um de propyleno ([2]):

$$\underbrace{\begin{matrix}CH^3\\CH^3\end{matrix}>CH}_{\text{Isopropylo}} — \ldots \quad \underbrace{—\underset{\displaystyle CH^3}{\underset{|}{CH}}—CH^2—}_{\text{Propyleno}} \ldots \quad \underbrace{—CH<\begin{matrix}CH^3\\CH^3\end{matrix}}_{\text{Isopropylo}}$$

de sorte que se forma:

$$\underbrace{CH^3.\underset{\displaystyle CH^3}{\underset{|}{CH}}\;.\;\underset{\displaystyle CH^3}{\underset{|}{CH}}\;.\;CH^2\;.\;\underset{\displaystyle CH^3}{\underset{|}{CH}}\;.\;CH^3}_{\text{Pentamethylbutano (R. Silva)}}$$

em que, de facto, ha 5 radicaes methylos associados ao grupo C^4H^5 do butano.

Poderia tambem admittir-se que, em vez do propyleno, o carboneto em questão resultasse do propylideno, associando a si os dois isopropylos

$$\begin{matrix}CH^3\\CH^3\end{matrix}>CH\;.\;\begin{matrix}CH^3\\|\\C\\|\\CH^3\end{matrix}\;.\;CH<\begin{matrix}CH^3\\CH^3\end{matrix}$$

e o carboneto, que seria então uma vez terciario e duas vezes

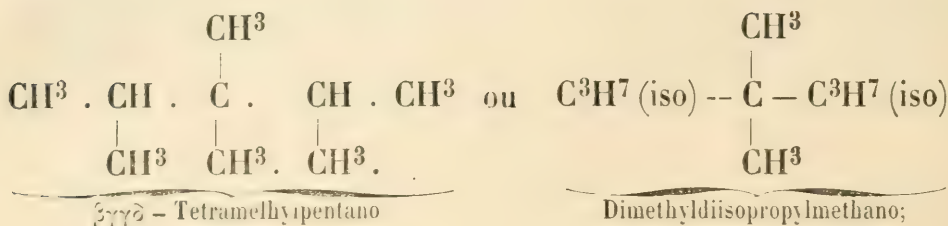
---

([1]) *Bulletin de la Societé chimique de Paris*, t. XVIII, pag. 529; t. XXII p. 50.

([2]) Roscoe and Schorlemmer, *A tratease on chemistry*, vol. III, Part. I, London, 1881, pag. 659.

secundario, poderia considerar-se derivado, do pentano ou do methano:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & CH^3 & & & \\ & & & | & & & \\ CH^3 & . & CH & . \; C \; . & CH & . & CH^3 \\ & & | & | & | & & \\ & & CH^3 & CH^3. & CH^3. & & \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c} CH^3 \\ | \\ C^3H^7\,(\text{iso}) - C - C^3H^7\,(\text{iso}) \\ | \\ CH^3 \end{array}$$

βγγδ – Tetramethylpentano | Dimethyldiisopropylmethano;

e é assim que elle vem citado em alguns tratados de chimica organica [1].

É um corpo liquido, cujo ponto de ebullição é 130°.

(*Continua*).

---

(1) Beilstein, *Handbuch der organisch. Chemie*, 3.e Aufl., t. I, pag. 105; Richter, *Lexikon der Kohlenstoffverbindungen*, t. I, 1900, pag. 644.

O CAPITALISMO E AS SUAS ORIGENS EM PORTUGAL

POR

BENTO CARQUEJA

I

A propriedade capitalista

A evolução economica tem feito modificar sensivelmente o papel do *capital.*

Foi, primeiramente, modesto instrumento do trabalhador normal; depois, apartou-se d'elle, a pouco e pouco, e passou para as mãos dos ricos. De simples instrumento de producção passou a ser, frequentemente, instrumento de luxo ([1]).

Este novo regimen social, a que os socialistas chamam *capitalismo*, representa uma das phases mais interessantes do mundo moral moderno, no qual os factores economicos não são a unica causa dominadora, por isso que aos factores ideologicos cabe tambem um papel importante. A civilisação não póde provir do materialismo sem conforto, do determinismo fatalista, fontes em que a democracia social alimenta o seu pessimismo cruel; só a evolução, com os seus processos discretos mas seguros, pode encaminhar á civilisação progressiva ([2]).

([1]) CH. GIDE, *Principes d'économie politique.*
([2]) L. FIORENTINI, *La evoluzione del socialismo alla fine del secolo XIX.*

Estudar o problema do *capitalismo* consiste precisamente em estudar todos os factores da producção, porque todos elles se combinam para essa resultante commum. Não o comprehenderam assim os physiocratas, que só consideravam a terra como factor da producção, porque lhes parecia que só ella dava mais do que recebia; mas o seu exclusivismo não tem hoje a menor razão de existencia, porque, se no trabalho e no capital ha apenas transformações, a propria agricultura não faz senão transformar as materias contidas no solo, na atmosphera, nos adubos, etc., utilisando as forças naturaes.

Ao estudarmos o problema do *capitalismo*, esforçar-nos-hemos por olhar os diversos factores com imparcialidade, procurando reduzir, até onde seja possivel, aos seus elementos fundamentaes os phenomenos complexos da propriedade capitalista.

Vejamos, em primeiro logar, como se constituiu a riqueza capitalista.

É incontestavel que a economia da terra livre é substancialmente diversa da economia da terra occupada: a terra livre exclue a possibilidade da renda e, portanto, a formação da propriedade capitalista. Para o homem selvagem, a terra livre póde ser tratada sem capital; mas, para o homem civilisado, a cultura sem capital é impossivel.

Loria oppõe a esta affirmação a observação dos immigrantes, que, não possuindo coisa alguma, immediatamente, sem qualquer periodo de aprendizado industrial e sem atravessarem o trabalho salariado, passam da condição de proletarios á de proprietarios independentes ([1]).

Loria admitte que, sob o regimen da terra livre, o trabalhador póde produzir capital, com o qual póde proseguir na producção, augmentando-a progressivamente; e, d'esta maneira, ainda que os outros elementos naturaes sejam inaccessiveis a esse mesmo trabalhador, este, occupando a terra, assegura para si uma existencia independente e foge á necessidade de vender o seu trabalho por uma retribuição. Insiste ainda Loria em que o facto de os operarios das cidades não se disporem bem a dedicar-se á agricultura, transferindo-se para terras desoccupadas, não passa de um pro-

---

([1]) A. Loria, *Il capitalismo e la scienza*, pag. 91.

ducto psychologico, resultante da impossibilidade, em que elles têem estado, de adquirir alguns bens prediaes ([1]).

Em todo o caso, se não ha termo de comparação entre o esforço do lavrador para a apropriação da terra e o esforço do productor de capitaes para se abster do consumo d'esses mesmos capitaes, póde bem calcular-se o esforço que teria de realisar o lavrador passando a productor de capitaes.

O que é certo é que a historia e a estatistica nos ensinam que a propriedade capitalista se tem formado, em todos os povos e em todas as idades, pela suppressão da terra livre. Emquanto subsistirem terras livres e cada qual pudér, á sua vontade, occupar uma parte de sólo e consagrar-lhe o seu trabalho, a propriedade capitalista é impossivel, porque ninguem está disposto a trabalhar para outrem, quando possa estabelecer-se, por conta propria, n'um terreno sem valor. Em taes condições, a fórma economica consiste na *propriedade para os trabalhadores,* isto é, uma pequena propriedade para os agricultores e para artistas independentes.

Mas, como observa Loria n'uma outra sua obra ([2]), esta fórma economica, que impede a exploração do homem pelo homem, envolve tambem a associação do trabalho, e, portanto, o desenvolvimento energico, o progresso racional da producção; por outro lado, não podem constituir-se associações espontaneas entre os proprietarios trabalhadores, porque a isso se oppõe o espirito de independencia d'elles.

A evolução economica obriga, pois, a transformar essa fórma primitiva, substituindo-a por outra mais efficaz, que permitta a associação do trabalho.

E que essa transformação se opera não soffre a menor duvida. Que é o *homestead*, nos Estados Unidos? É nada menos do que o reconhecimento aos immigrantes do direito de propriedade sobre diversos tratos de terreno, por um preço nominal, com a unica condição de o arrotearem e de o explorarem depois, durante cinco annos.

É assim que nasce a propriedade, isenta, segundo a opinião dos socialistas, de vicios de origem, e convenientemente dividida

---

([1]) A. Loria, *Costituzione economica odierna*, pag. 396.
([2]) A. Loria, *Problèmes sociaux contemporains,* pag. 70.

em predios de extensão sufficiente, — «a propriedade, emfim, resgatando-se para com a collectividade do valor preexistente á exploração individual, que o sólo póde ter, de modo que os acrescimos de valores posteriores são perfeitamente, como facto ordinario, os fructos directos do trabalho do occupante» ([1]).

A suppressão da terra livre, diz **Loria**, terá logar segundo methodos que variam em relação com o grau de densidade da população; se esta fôr pouco numerosa, será preciso, para amarrar o homem á terra, arrastal-o e reduzil-o á escravidão, ao passo que, augmentando a densidade da população, basta que o pequeno numero de dominadores possua todo o sólo, para que fique garantida a persistencia da economia capitalista. Mas, seja qual fôr o processo pelo qual se obtenha a suppressão da terra livre, essa suppressão não deixará, em caso algum, de ser a base unica da propriedade separada do trabalho, da scisão da humanidade em uma classe de heroes e outra de párias, n'um numero restricto de triumphadores e uma enorme massa de vassallos ([2]).

O que é certo é que os progressos constantes do socialismo scientifico, em todos os paizes, tanto da Europa como da America, vão procurando diminuir, dia a dia, a importancia das differentes doutrinas, que, propozeram resolver a questão social pela nacionalisação do sólo, mantendo a propriedade particular do capital mobiliario. Todavia, essas doutrinas téem ainda adeptos fervorosos. Basta-lhes, na America, o influxo de **Henry George**, cujas obras téem todas uma fórma verdadeiramente fascinadora e basta-lhes, em Inglaterra, o *landlordismo*, com as suas ligas para a reforma agraria e com o collectivismo agrario, a que o proprio **Herbert Spencer** se mostrou favoravel ([3]). Emquanto assim succeder, taes doutrinas não desapparecerão.

Os economistas allemães contemporaneos affirmam a necessidade de limitar a divisão de propriedade do sólo, no interesse da communidade. **Adolpho Wagner** reclama até a nacionalisação de toda a propriedade urbana. **Stein**, **Schaeffle** e outros entendem que a causa primaria de todos os males está na distribuição viciosa do sólo, na sua apropriação privada e não nas fórmas ge-

---

([1]) P. Cauvès, *Cours d'économie politique*, III, pag. 398.
([2]) A. Loria, *Problèmes sociaux contemporains*, pag. 71.
([3]) H. Spencer, *Social statics*.

raes da producção. As criticas d'esses socialistas de cathedra serviram e contribuiram para introduzir na Allemanha as ideias de Henry George, que inspiraram a um publicista, Stamm, e a um industrial, Flurscheim, a fundação d'uma *Deutsche Landliga*, em 1886; dissolvida essa Liga, transformou-se em uma associação para a reforma da propriedade predial, da qual sahiu uma associação suissa, a *Frei Land*.

Segundo a opinião expressa por Flurscheim nas suas obras [1] a causa principal de todos os males sociaes não está na fórma da producção capitalista, no facto de que alguns individuos possam possuir capital e empregal-o, como lhes aprouver, na producção; está, sim, no facto de que mesmo o excesso dos capitaes, ou, pelo menos, uma parte d'elle ache emprego e esse emprego seja realisado fóra da producção, isto é, em collocações prediaes. Esta é, na opinião de Flurscheim, a causa das crises, a origem do mal-estar social, que ha-de persistir, emquanto não fôr defeso ao capital achar collocação na terra, emquanto não fôr obrigado a empregar-se exclusivamente na industria.

N'um rasgo de phantasia, Flurscheim crê que, no dia em que se conseguisse a realisação d'este ideal, o consumo augmentaria, a super-producção desappareceria, e, portanto, desappareceriam tambem as consequencias d'ella.

Previsões identicas faz Asturaro, antevendo a substituição da propriedade particular pela collectivisação dos meios de producção. «Em breve tempo, diz, a fórma economica vigente cederá o logar a outra mais perfeita; n'esse momento, eliminados os ultimos monopolios, realisar-se-hão as condições necessarias á valorisação dos productos em trabalho e a nova fórma economica traduzirá o ideal do valor. O conceito da troca, no ultimo estado da sua evolução, substituir-se-ha por um conceito superior. As mercadorias valorisar-se-hão em trabalho, quando deixarem de ser mercadorias. Á troca industrial succederá necessariamente a reciprocidade dos serviços em trabalho e da compensação entre o individuo e a sociedade. Este novo conceito iniciará tambem a sua evolução; com o augmento da riqueza social e por virtude das novas relações economicas e do altruismo, a fórmula *a cada*

---

[1] *Der einzige Rettungsweg, Deutschland in 100 Jahren, Papst und Social reform, Bansteine.*

um o seu trabalho substituir-se-ha por outra: *cada um segundo as suas forças e a cada um segundo as suas necessidades.* Esta será a formula-limite da economia e, talvez, da propria especie humana» ([1]).

Em nosso entender, a collectivisação absoluta da propriedade é um sonho; mas não duvidamos de que a evolução economica opere uma grande transformação no regimen da propriedade.

E consideramos um sonho a collectivisação absoluta da propriedade porque a evolução historica, da idade média para cá, a contraría. A divisão dos grandes dominios senhoriaes, as leis austriacas de 1880, protectoras da pequena industria fundiaria, o desapparecimento da *mezzadria* italiana, o exemplo de nações como a França, a Inglaterra, os Estados Unidos e a Australia demonstram tendencias, que não conduzem, positivamente, á collectivisação absoluta da propriedade.

Na opinião de Alfred Fouillée, nem o individualismo nem o socialismo resolvem o problema da propriedade, com verdadeiro rigor scientifico; «ha em toda a propriedade, diz, theoricamente considerada, uma parte individual e uma parte social; na prática, a exacta distribuição d'essas partes supporia uma *medida* absoluta do que é devido a cada um, segundo as suas obras; mas tal *justiça distributiva* é uma chimera e, por isso, tem de lançar-se mão de convenções assentes em medias geraes» ([2]).

É claro que para o anarchismo nenhuma d'estas soluções é acceitavel, porque, considerando os anarchistas a propriedade como producto do roubo, da fraude e do direito da força, para elles «as reformas propostas não passam de cantigas para adormecer os explorados; para obviar aos males, que se pretende curar, é preciso atacar a origem principal, a organisação proprietaria e capitalista» ([3]).

Se do regimen da propriedade passarmos ao regimen industrial, verificaremos que, pela concentração dos capitaes, á grande industria está necessariamente reservado um papel dominante, pois, podendo contentar-se com menores lucros, ha-de levar vantagens sobre a pequena industria.

([1]) Asturaro, *La sociologia e le scienze sociali*, IV, pag. 51 e seg.
([2]) A. Fouillée, *La propriété sociale et la démocracie*, pag. 64.
([3]) J. Grave, *La société mourante*, pag. 50.

É certo que a larga divulgação da grande industria havia de trazer comsigo uma lucta de concorrencia de cada vez mais accesa; mas a concentração das emprezas industriaes, que hoje se manifesta intensamente, por toda a parte, vem contrariar poderosamente esse effeito. Na opinião de Cauwès, «a concentração dos capitaes, sob a fórma de associações cooperativas, é um dos termos concebiveis da evolução economica» ([1]).

Convem não esquecer um dos factores importantes nas suas relações com o capitalismo — o *credito.*

Não foi a divisão do trabalho nem a acquisição de ferramentas aperfeiçoadas, que precederam a concentração do capital, como, á primeira vista, se poderia julgar; não foi o orgão que creou a funcção capitalista; succedeu exactamente o contrario. «O primeiro apparecimento do capital, isto é, d'uma riqueza que produz ao seu possuidor um rendimento, independentemente do seu trabalho, precedeu e não seguiu a primeira apparição da divisão do trabalho. Foi a funcção capitalista que primeiro creou a manufactura» ([2]).

Assim, devemos attribuir ao credito uma funcção dominante no actual movimento economico; é, sem duvida, o principal instrumento de que se soccorre o commercio do nosso tempo para se expandir pela fórma assombrosa por que o vemos desenvolver-se. Nasceu o credito no dia em que as riquezas futuras, ainda não existentes, que constituem o seu verdadeiro fim, foram por qualquer fórma realisadas e postas ao alcance do commercio, por meio de titulos negociaveis ([3]); mas, para que o credito attingisse as proporções extraordinarias, que hoje se lhe reconhecem, foi preciso que «o desenvolvimento do espirito commercial moderno e uma civilisação mais adiantada provocassem um augmento de confiança, consideravel e continuo» ([4]).

O ambito do credito foi sensivelmente accrescentado e as funcções d'elle amplamente melhoradas com a organisação das *clearing-houses*, camaras de compensação ou liquidação, cuja essencia representa verdadeiramente uma applicação aperfeiçoada

---

([1]) P. Cauwès, *Cours d'économie politique*, III, pag. 278.
([2]) Henri Hauser, *Revue d'économie politique*, 16.º anno, n.º 4, pag. 313.
([3]) Ch. Gide, *Principes d'économie politique*, pag. 333.
([4]) Henry Wood, *The political economy of natural law*, pag. 214.

do systema da conta corrente, combinado, a maior parte das vezes, com o systema de contra-partidas (1).

É certo que, com o auxilio do credito, os productores e negociantes conseguem realisar os seus capitaes e renoval-os rapidamente; mas não póde admittir-se a doutrina d'aquelles que sustentam, com Macleod (2), que o credito multiplica capitaes. Sustentar isto corresponderia a pretender que contrahir uma divida equivale a crear um capital. Para defender similhante these é preciso ter uma noção erronea do que seja riqueza.

Nas operações de credito ha mobilisação, mas não augmento da somma de capitaes; se o credito faz chegar os capitaes a mãos mais activas e facilita a transformação das riquezas, não póde contribuir para que o prestamista e o mutuario sejam ambos anniquilados. Este ultimo utilisa o capital, com exclusão do primeiro (3).

Léon Walras estabeleceu muito nitidamente as leis que presidem á formação de novos capitaes, leis que são as seguintes:

1.° Produz-se a alta ou a baixa da taxa do rendimento, segundo a offerta dos capitaes e dos rendimentos novos em numerario fôr superior ou inferior ao pedido.

2.ª Augmenta-se ou diminue-se a quantidade dos capitaes e dos rendimentos novos, segundo o preço da venda fôr superior ou inferior ao preço do custo.

3.ª A identidade das taxas do rendimento é a condição da utilidade maxima dos capitaes e rendimentos novos (4).

Em consequencia da intervenção da moeda, as noções de *capital* e de *credito* são essencialmente quantitativas.

Do que deixamos summariamente exposto póde concluir-se que o capitalismo offerece deficiencias, quer se encare pelo lado da propriedade da terra, quer pelo da organisação industrial.

Como se corrigirão essas deficiencias? Hão de corrigir-se, sem duvida, interessando efficazmente o operario no resultado da producção.

---

(1) Aug. Arnauné. *La monnaie, le crédit et le change*, pag. 405.

(2) Macleod, *The theory of credit*, 1889; e *Theory and practice of banking*, 1892

(3) P. Cauwès, *Cours d'économie politique*, II, pag. 265.

(4) L. Walras, *Études d'économie politique appliquée (theorie de la production de la richesse sociale)*, pag. 335.

Com esse intuito, Loria pensou na creação do que elle chama *salario territorial* e que defende contra os ataques dos economistas allemães e italianos, assegurando que esse *salario* não faria subir demasiadamente o valor da terra, porque, no seu intender, serviria até para pôr cobro ao processo das avaliações exaggeradas [1].

Em nosso intender, não é preciso crear o salario territorial. Bastará restringir a propriedade ociosa, como fonte de rendimentos importantes, e immediatamente o operario irá ficando interessado nos resultados da producção da terra. D'esta forma, a extensão da propriedade individual ampliar-se-ha, de cada vez mais, e os trabalhadores transformar-se-hão successivamente em proprietarios.

Por outro lado, ao passo que o progresso industrial vae contribuindo poderosamente para diminuir a retribuição necessaria do capital, augmenta successivamente a do trabalho.

E, d'esta forma, podemos antevêr que o aperfeiçoamento dos machinismos, a divisão do trabalho e a concentração crescente dos instrumentos de trabalho hão-de conduzir necessariamente a uma nova sociedade, gerada no seio da nossa sociedade capitalista.

Examinadas assim, summariamente, as bases em que o capitalismo assenta e estudada a evolução economica, que o caracterisa, passaremos em revista as doutrinas de algumas escolas economicas, a respeito d'esta importante materia.

II

Critica das escolas economicas

O problema do capitalismo ficaria muito incompletamente estudado, se não considerassemos os pontos de vista diversos sob que foi olhado pelas escholas economicas, que prescindem da analyse integral da terra livre, e pelo socialismo.

D'essa investigação vae resultar reconhecer-se que as theorias

---

[1] A. Loria, *Il capitalismo e la scienza*, pag. 260 e seg.

economicas difficilmente podem explicar os complexos phenomenos da propriedade capitalista e que na theoria da terra livre se encontra um poderoso instrumento de dissecção social.

Entremos, porém, na analyse, que nos cumpre fazer, das duas theorias.

Os economistas resumiram, outr'ora, a analyse e a justificação da propriedade na affirmação de que o lucro do capital é a compensação da abstinencia do capitalista. Desagradou, todavia, a alguns similhante allegação; entre elles, póde citar-se MARSHALL, que pretendia definir o lucro como compensação, não da abstinencia, mas da paciencia ou da espectativa (*waiting*) do capitalista (1).

Devemos confessar, porém, que, por mais louvores que possam merecer estas duas maneiras de definir, ha n'ellas mais um jogo de palavras do que a analyse fria e imparcial dos factos; devemos reconhecer tambem que nem uma nem outra nos mostram a essencia da renda capitalista.

BOHM-BAWERK procurou uma solução mais transcendente. Affirma que o operario não faz mais do que trocar bens futuros por bens presentes e que, tendo sempre uma certa quantidade de bens futuros menor valor do que igual quantidade de bens presentes, d'esta fórma a equação, que toda a troca requer, em relação á quantidade dada e recebida, não fica garantida senão quando o capitalista receba uma quantidade de bens futuros maior do que a quantidade de bens presentes que deu, isto é, receba um excedente, que constitue precisamente o *lucro* (2).

Para se reconhecer o que vale esta theoria, em relação ás que a antecederam, basta notar que se funda sobre a noção da *troca* e o caracter essencial da troca é a *igualdade quantitativa* da riqueza dada e da riqueza recebida (visto que ambas capitalisam igual quantidade de trabalho aggregado) e a *differença qualitativa*, porque n'esta reside a razão da permuta.

Ao contrario d'isto, o processo capitalista tem por caracter essencial a *igualdade qualitativa* do producto dado e do producto recebido (pois é certo que o capitalista antecipa uma somma

(1) MARSHALL. *Principles of economics*, pag. 290.
(2) BOHM-BAWERK, *Positive theorie des kapitales*.

em moeda, para obter, ao fim de um dado praso, uma massa de mercadorias, que troca contra moeda) e a *differença quantitativa*, a qual constitue precisamente o *lucro* ([1]).

Ha, pois, n'esta theoria uma confusão de phenomenos relativos á troca, que são, de natureza, essencialmente oppostos.

Demais, se passarmos a examinar a theoria de Bohm-Bawerk, sob a feição operaria, em vez de a considerarmos sob o ponto de vista capitalista, mais absurda nos parecerá.

Effectivamente, póde haver ideia mais extravagante do que a de figurar o operario como vendedor de bens futuros?

A nossa legislação civil estabelece que o proprietario póde alienar a *sua* propriedade, por qualquer dos modos por que esta póde ser adquirida ([2]). Ora, o operario, na sua qualidade de proletario, não possue bens presentes, nem se presume que venha a possuir bens futuros, porque com o seu trabalho isolado não póde produzir coisa alguma e porque todas as riquezas, que produzir com o trabalho reunido ao capital serão propriedade d'aquelles por quem o capital foi antecipado. Como poderá, pois, vender bens futuros a quem quer que seja? O operario dispõe dos seus musculos, da sua força, do seu trabalho e só isso póde dar ao capitalista e ao lavrador, em troca do pão de que ha-de alimentar-se e da roupa com que ha-de cobrir-se. A essa fórmula singela mas rude se reduz, em ultima analyse, o contracto do salario.

Ricca-Salerno, vindo em auxilio da theoria de Bohm-Bawerk, admitte, como elle, a troca de bens futuros por bens presentes; mas restringe que isso só é verdadeiro quando e onde a organisação operaria fôr perfeita. Quer dizer que, para o operario isolado, o producto futuro é muito afastado, e não é praticavel a producção independente; em taes condições, esse producto «seria puramente theorico e inefficaz, como valor, se não se lhe substituisse outro mais concreto e mais pratico, isto é, o sacrificio do trabalho correspondente» ([3]). Isto quer dizer que, em taes circumstancias, a relação do salario não é uma venda do salario

---

([1]) K. Marx, *Das kapital,* secção III.
([2]) *Codigo Civil Portuguez,* art. 2357.º
([3]) Ricca-Salerno, *La teoria del salario nella storie delle dottrine e dei fatti economici,* pag. 43.

contra productos, mas contra capital, como os economistas classicos sempre proclamaram. **Salerno** opina que, por virtude das uniões, «ligando-se, por uma fórma collectiva, as varias especies de trabalho, relativo ao exercicio de uma dada industria, póde valorisar-se a remuneração total, em relação com o resultado da producção; e, d'este modo, o salario normal, em todas as suas graduações, é determinado tambem pelos trabalhadores directamente, á face da differença do valor comparativo entre a antecipação presente e o producto futuro» ([1]).

Como se vê, esta theoria tem, pelo criterio do proprio auctor, uma applicação restricta a nações privilegiadas e, demais, na organisação operaria, que elle pretende, ha manifesta confusão entre a formação de associações operarias de resistencia e formação de associações technicas de trabalho, que são, de facto, diversas e independentes das primeiras. É, de resto, pouco admissivel que o facto technico da associação do trabalho venha a coincidir com o facto social da organisação unionista dos operarios, pois a historia ensina que a primeira precede em muitos seculos a segunda e que, ainda hoje, na grande maioria dos Estados, existe a primeira, sem que a segunda esteja ainda estabelecida ([2]). E, resta perguntar, as associações technicas ou organisações unionistas dos operarios poderão tornal-os capazes de discriminar o valor do producto futuro e de exigir um salario a elle correspondente?

As *Trades-Unions* téem exercido sobre o contracto do salario uma influencia bem manifesta, mas puramente quantitativa, que permitte aos operarios suspenderem, durante um periodo mais ou menos consideravel, a offerta do trabalho e exigirem do capitalista um preço mais remunerador.

Se tentarmos apreciar á luz das ideias de **Ricca-Salerno** o problema da distribuição capitalista das riquezas, encontrar-nos-hemos perante uma serie de interrogações, a que não achamos solução.

Taes doutrinas não conseguem, effectivamente, explicar porque podem uns viver sem trabalhar e outros são obrigados, para poderem viver, a pedir-lhes o capital e a trabalhar para esse fim, até ao completo esgotamento.

([1]) Ricca-Salerno, op. cit., pag. 58.
([2]) A. Loria, *Il capitalismo e la scienza*, pag. 8.

Vejamos agora uma outra phase da questão, aquella que lhe deram alguns economistas modernos, que defendem a justiça da quantidade do lucro e do salario e que consideram o lucro como producto especifico do capital e o salario como producto do trabalho puro.

Um economista inglez, Clark, tem o seu nome especialmente ligado a essa ordem de ideias [1].

Inspirou-se Clark em duas proposições fundamentaes de Thunen: 1.ª Onde exista terra livre, o decrescimento da productividade dos capitaes successivos reverte em vantagem exclusiva do operario, por isso que a prova do lucro é determinada pelo incremente do producto devido á ultima unidade do capital empregado e os productos differenciaes das unidades productoras acrescem integralmente ao salario. 2.ª O salario do trabalho é determinado pelo augmento do producto devido ao ultimo operario empregado na empreza e estabelece-se segundo esta medida, conforme existir ou não existir a terra livre [2].

Como se vê, a sorte do operario é, nas duas phases economicas, inteiramente diversa: no caso de a terra ser livre, o productor do capital deve abster-se da annexação de novos operarios á empreza, em um momento muito anterior áquelle em que se deterá, se a terra fôr occupada, pois, n'esta segunda phase, o operario, privado de opção, é obrigado a empregar-se na empreza do capitalista, para colher o seu salario; ao passo que, na primeira phase, o operario, podendo estabelecer-se de sua conta em uma terra livre, recusa-se a empregar-se na empreza do capitalista, quando o augmento do producto, a que o seu emprego dér logar e, conseguintemente, o seu salario, attinjam um nivel baixo.

Clark, adoptando as duas proposições de Thunen, supprime, porém, o caracter relativo ou subordinado ás condições de occupação do territorio e affirma, sem mais considerações, a plena e invariavel applicabilidade, quer a condição da terra seja livre, quer seja occupada. Affirma Clark que o decrescimento da productividade do capital redunda em augmento de salario, o qual, portanto, equivale ao que resta do producto complexo, depois

---

(1) Clark, *The distribution of wealth*, 1899.
(2) Thunen, *Der isolirte Staat*, II, 1.º, pag. 104.

de deduzido o lucro total, na proporção determinada pelo augmento do producto devido ao ultimo capital empregado.

Clark, para demonstrar a sua theoria, admitte que o capital technico (*c*) 100 e um só operario (*o*) podem dar os seguintes productos variaveis:

1.ª hypothese	— 100 *c*	com	1 *o*	produz	100
2.ª »	— 100 *c*	»	1 *o*	»	100 + 98
3.ª »	— 100 *c*	»	1 *o*	»	100 + 17
4.ª »	— 100 *c*	»	1 *o*	»	100 + 15.

A percentagem do lucro, diz Clark, é 15 %; o lucro total é 60 e o salario é 90.

As ideias de Clark téem sido vigorosamente contestadas, em mais de um ponto, não se justificando, especialmente, o asserto de que o decrescimento da productividade dos capitaes successivos redunde sempre no augmento de mercadorias, por isso que este phenomeno é só possivel no caso de a terra ser livre. Estando totalmente occupada a terra, a que sancção poderá, effectivamente, recorrer o operario para exigir, em sua propria vantagem, a differença de producto dos capitaes successivamente empregados?

E o emprego de operarios, cuja productividade seja decrescente, é incompativel com as condições geraes da terra occupada, que são as que predominam no nosso tempo.

Se se attender a que o producto do trabalho puro é indeterminavel e a que, no regimen da terra occupada, a retribuição do trabalho se estabeleceu, sem se attender á sua producção, apenas pelo arbitrio do capitalista, seremos levados a concluir que as doutrinas de Clark se não conformam com a realidade das coisas, especialmente quando estudados os phenomenos na sua essencia.

Se d'esse campo passarmos para a analyse mais profunda e objectiva da questão, nos dominios do socialismo puro, encontraremos diante dos olhos vasto caminho a trilhar.

Abre-nos esse caminho o grande pensador Karl Marx, para o qual, como se sabe, ha apenas duas fórmas de constituição economica — a economia com salariado, que representa a actualidade, e a economia collectivista, que representa a fórma-limite da economia, o limite para o qual tende.

É claro que, na discussão da legitimidade do direito de propriedade, tudo se resume a demonstrar que a fórma-limite assim designada, o collectivismo, exclue o lucro do capital. Mas não é facil a empreza, porque a organisação da propriedade collectiva não faz desapparecer a renda por accumulação.

Como se sabe, a base da doutrina social de **Marx** é a chamada *lei da accumulação capitalista* e foi por esse lado que principalmente o atacou o seu feroz critico **Franz Oppenheimer**.

Essa lei é a descripção do mecanismo, que faz nascer o *exercito da reserva;* é a base da theoria da miseria crescente *(verelendungstheorie)* e da theoria dos cataclysmos sociaes *(zusammenbruschstheorie)*; sobre essa lei foi edificado o collectivismo.

Marx conseguiu provar, por uma serie de factos, que o operario não carece de trabalhar um dia inteiro para obter os generos necessarios á sua existencia e á da sua familia; calculando em seis horas o tempo de *trabalho necessario* para provêr ás subsistencias, nas outras seis horas de trabalho produz um excedente *(mehrwerth)*, em beneficio dos que o empregam. É d'esse excedente, embolsado pelo patrão, que, segundo **Marx**, nasce o capital.

Não considerou **Karl Marx** o lucro do capital e, por isso, collocado na impossibilidade de determinar a formação natural do lucro, teve de fundar a sua critica sobre a affirmação de que nos productos não ha senão trabalho encorporado.

Á theoria de **Marx** oppõe **Loria** a sua concepção da *terra livre*. **Loria** affirma que, por esta fórma, fica annullada a possibilidade de lucro devido á accumulação, em si, porque ao lavrador que accumula é attribuida renda igual á do lavrador que não accumula ([1]).

Acha **Loria** que o mais fecundo resultado d'esta doutrina é pôr termo á distincção subtil e capciosa entre valor do trabalho e força de trabalho, que lhe parece puro bysantismo.

Resta-nos examinar a orientação seguida pela escola do socialismo agrario.

As theorias de **Henry George** téem pontos de contacto com as de **Ricardo**. **Henry George** considera a necessidade de proceder á cultura das terras mais estereis, como resultado natural do augmento da população e como producto do mau proceder

([1]) A. Loria, *Il capitalismo e la scienze,* pag. 41.

dos proprietarios, que abandonam a cultura das terras melhores, á espera de que augmentem de valor. Na theoria de RICARDO, os proprietarios aproveitam inactivos o decrescimento da margem das culturas. No espirito de HENRY GEORGE influem poderosamente os processos adaptaveis aos paizes novos; em todo o caso, cabe-lhe o ter feito entrar em consideração a população no phenomeno da renda.

Póde affirmar-se que as ideias de HENRY GEORGE exerceram sobre a theoria ricardiana da renda uma influencia identica á que os escriptos de LASSALLE imprimiram sobre a theoria ricardiana do salario.

Para FLURSCHEIM, a propriedade fundiaria exclusiva não é unicamente a base da renda, nem se limita a exercer sobre o lucro uma influencia meramente quantitativa: é a propria base do lucro (1). Reconhece, por outras palavras, que a essencia da constituição economica, igualitaria ou capitalista, está na existencia ou na suppressão da terra livre.

O systema de OPPENHEIMER é essencialmente theorico. Affirma que, emquanto houver terras occupaveis, é impossivel a formação da economia capitalista sobre a base do salariado e bem assim a repartição dos productos em proporção igual para os productores do capital e para o trabalhador ou trabalhadores, que se lhe associem (2).

Perante as divergencias das diversas escolas, permanece incontroverso um facto importante: — a actual tendencia para uma alliança contractual, de cada vez mais accentuada, e para uma liberdade individual sempre maior.

Por isso, tudo quanto possa contribuir para contrariar essa tendencia ha-de necessariamente levantar protestos. O proprio collectivismo, que julgava ser a chave da solução de muitos problemas sociaes, esse mesmo é rejeitado, por não satisfazer a todas as exigencias da solução que se pretende (3).

---

(1) FLURSCHEIM, *Rent, interest and wages*, pag. 53.

(2) OPPENHEIMER, *Das grossgrundeigenthum und die soziale Frage*.

(3) «O socialismo não quer crear uma reacção nova, seja ella qual fôr. O individuo deve ser livre, não no sentido metaphysico, como sonham os anarchistas, isto é, livre de todos os deveres para com a communidade; mas sim livre de todo o constrangimento economico nos seus movimentos e na escolha da sua profissão». BERNSTEIN, *Socialisme théorique et social-démocratie pratique*, pag. 223.

O socialismo puro define nas seguintes formulas as suas aspirações, em materia de distribuição de riqueza:

—a rapidez de accumulação da fortuna particular propria d'uma organisação de propriedade similhante a um titulo de accumulação deve ter duração limitada ao que fôr necessario e sufficiente.

—a maior igualdade de todos nas condições iniciaes artificiaes da concorrencia e a intensidade e extensão sempre menores das influencias mais activas impeditivas da redistribuição devida á especulação prejudicial.

—eliminação gradual e continua de todo o parasitismo, isto é devolução, em quantidade sempre maior, á communidade das rendas ricardianas differenciaes, naturaes ou adquiridas.

—passagem á communidade e á gratuidade dos instrumentos de producção e de antecipação subsistente (capital-salario) isto é, conjugação do trabalhador com o seu instrumento de producção [1].

O cooperativismo ha-de preparar soluções, que de outra forma seriam difficeis de encontrar, sem produzirem commoções violentas, e os seus effeitos começam já a manifestar-se nas nações mais adiantadas, com as Uniões agrarias na Allemanha, os Syndicatos agricolas em França, e diversas instituições similares na Italia, que fazem reverter para a terra abundantes capitaes.

E, assim, ao mesmo tempo que a propriedade capitalista manterá as suas regalias, as classes proletarias irão colhendo novos fructos da sua actividade, apesar de os socialistas intransigentes affirmarem que «a classe operaria é excluida dos progressos, que são obra sua, e as condições da vida melhoram mais rapidamente para a burguezia do que para o proletariado» [2].

O desenvolvimento do cooperativismo demonstra uma forte vitalidade nas classes trabalhadoras, pois patenteia que, vendo-se na impossibilidade, perante o regimen actual, de affrontar directamente a grande difficuldade da falta de capitaes, especialmente na grande industria, procuram na cooperação os elementos de que carecem. O exito completo das *Worhing Class Limiteds* e das *Wholesales*, é um facto por demais conhecido [3].

---

(1) E. Rignano, *Di un socialismo in accordo colla dottrina economica liberale*, pag 227.
(2) Katsky, *Le marxisme*, pag. 224.
(3) B. Potter, *The cooperative movement in Great Britain.*

As cooperativas de producção não offerecem, realmente, qualquer meio de dar capital ao operario; mas facultam a este reservas para accumular os capitaes necessarios á sua cooperativa.

E, a par d'essa organisação cooperativista, ha-de necessariamente aperfeiçoar-se o regimen da propriedade.

A sociedade, no seu advento gradual para um estado mais consciente ha-de tornar-se cada vez mais utilitarista; por isso, dará preferencia á fórma de propriedade, que garanta os maximos beneficios ao maior numero, rejeitando, portanto, a que contrarie essa tendencia (1).

Pelo que diz respeito ao direito de testar, esta materia ha-de constituir sempre um ponto agudo de discussão, por isso que até mesmo das concepções do socialismo ás do anarchismo vae uma grande distancia (2). Opta-se por uma transacção entre as escholas extremas, estabelecendo restricções ao direito de testar, quer pelo augmento consideravel dos direitos de transmissão, quer animando a diffusão das riquezas, em harmonia com as ideias de Stuart Mill, tornando assim impossivel as grandes aggregações da propriedade, quer, finalmente fazendo usufruir o Estado uma parte das heranças, com o decorrer dos tempos, como mais de uma vez tem sido proposto.

E, modificado assim, em geral, o regimen da propriedade, apresentará a questão social novos aspectos, que mais a aproximarão das soluções tão debatidas, mas tão insistentemente procuradas.

Feito este rapido exame sobre o vasto problema capitalista, que na forma actual da organização social tem primaria importancia, vamos entrar numa série de investigações, tendentes a determinar as origens do capitalismo moderno em Portugal.

D'esta fórma, poderemos reconhecer até que ponto as doutrinas, que procuramos esboçar, téem applicação ao nosso paiz.

(Continúa).

---

(1) «O direito individual de propriedade não póde ser fundado senão na utilidade commum e geral do exercicio d'esse direito, utilidade que póde variar segundo os tempos». Saint Simon, *Vues sur la propriété*.

(2) «O direito de herença não passa, em summa, de ser um direito ao ocio e ao parasitismo. Malon, *Le socialisme intégral*, I, 272.

SUR UNE TRANSFORMATION
D'UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES BINÔMES

PAR

M. E. Jahnke

(Professeur à l'Académie des Mine de Berlin)

On doit à **Briot et Bouquet** des recherches profondes sur les équations différentielles de la forme $\left(\frac{du}{dz}\right)^n = f(u)$ dans le cas que des fonctions monodromes doublement périodiques en forment les intégrales. Plus tard, les différents types de ces équations binômes ont été regagnés par M. E. **Netto**, L. **Fuchs** et moi au moyen des procédés tout à-fait algébriques.

On pourrait citer encore **Legendre**, **Minding**, **Richelot**, A. **Picart**, **Boetiig** et d'autres qui, en réduisant des intégrales abéliennes à des intégrales elliptiques, ont traité le même type d'équations différentielles.

L'équation de troisième degré qui a la forme élégante

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^3 = P_3^2(u),$$

$P_3(u)$ désignant un polynôme cubique, est d'un intérêt particulier. Pour l'intégrer, j'ai exposé une méthode qui, sans faire usage des racines de $P_3(u) = 0$, conduit à une formule de transformation $u = \varphi(s)$, $s = \wp(z)$, où la valeur de la fonction **Weier-**

STRASSIENNE $s=\infty$ correspond aux valeurs arbitraires $z=z_0$, $u=u_0$ (¹). Mais, pour arriver à ce but, il faut introduire comme intermédiaire une fonction elliptique y de deuxième degré de sorte qu'à la valeur $u=\infty$ correspond la valeur $y=\infty$. Une remarque de FERDINAND CASPARY (²) m'a fait étudier comment éviter ce détour *sans déranger la symétrie des formules.*

On peut, il est vrai, éviter ce détour en choisissant, dans la note citée, une des racines de $P_3(u)=0$ au lieu de la valeur arbitraire u_0. Mais les formules de transformation qui en résultent, font voir une dissymétrie relative aux dites racines laquelle est hors de la nature du problème.

Dans cette note je vais montrer qu'on peut transformer *immédiatement* la fonction u dans la fonction WEIERSTRASSIENNE $s=\mathfrak{p}(z)$ en exprimant s^3 comme quotient d'un covariant et de sa dérivée d'une forme cubique binaire. Ce résultat est analogue au résultat bien connu de HERMITE qui a réussi à réduire l'équation différentielle de *deuxième* degré à la forme WEIERSTRASSIENNE en se servant d'un covariant d'une forme biquadratique (³).

(¹) *Zeitschrift für Math. U. Ph.* 35, 376-380. 1890.

(²) CASPARY m'a communiqué, le 23 août 1893, le résultat élégant que voici:

«Es werde gesetzt

$$s^3=(A-B)^3(A-C)^3\frac{(w-B)(w-C)}{(w-A)^2};$$

dann ist

$$3s^2ds=\frac{(A-B)^3(A-C)^3}{(w-A)^3}U\,dw,$$

$$\sqrt{4s^3-(B-C)^2(C-A)^2(A-B)^2}=\frac{(A-B)(A-C)}{w-A}U,$$

wo

$$U=(B+C-2A)w+CA+AB-2BC;$$

folglich

$$\frac{3ds}{\sqrt{4s^3-(B-C)^2(C-A)^2(A-B)^2}}=\frac{dw}{\sqrt[3]{(w-A)^2(w-B)^2(w-C)^2}}».$$

(³) *Crelles Journal*, 52, 8; 1856. Il mérite d'être signalé que la forme WEIERSTRASSIENNE de l'équation différentielle de deuxième degré se trouve déjà dans cette note de HERMITE.

A la fin de la note je donnerai une extension de ce résultat à une classe d'équations différentielles binômes dont les intégrales sont des fonctions abéliennes. Même dans ce cas plus général, les formules de transformation conservent leur forme symétrique.

Soit donnée la forme cubique binaire

$$P = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3,$$

son covariant de deuxième degré

$$C = (a_0x + a_1y)(a_2x + a_3y) - (a_1x + a_2y)^2$$

et la dérivée de C, prise par x:

$$C'_x = 2(a_0a_2 - a_1^2)x + (a_0a_3 - a_1a_2)y.$$

Choisissons $x = u$, $y = 1$,

$$u_0 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{2(a_0a_2 - a_1^2)},$$

$$b_0 = a_0u_0 + a_1, \quad b_1 = a_1u_0 + a_2, \quad b_2 = a_2u_0 + a_3,$$

les deux covariants prennent la forme

$$C(u) = (a_0u + a_1)(a_2u + a_3) - (a_1u + a_2)^2,$$
$$C'(u) = 2(a_0a_2 - a_1^2)(u - u_0),$$

et le discriminant de P

$$g_3 = 4(a_0a_2 - a_1^2)(a_1a_3 - a_2^2) - (a_1a_2 - a_0a_3)^2$$

peut être mis sous la forme

$$g_3 = 4(a_0a_2 - a_1^2)(b_0b_2 - b_1^2) = 4(a_0a_2 - a_1^2)\,C(u_0),$$

..

puisque

$$C(u_0) = b_0 b_2 - b_1^2.$$

Alors posons

$$s^3 = \frac{C(u_0)\, C(u)}{(u - u_0)^2}.$$

En substituant pour le moment $\frac{1}{u - u_0} = v$, cette formule devient

$$(1) \qquad s^3 = C(u_0)\, C(v),$$

où

$$C(v) = (b_0 v + a_0)(b_2 v + a_2) - (b_1 v + a_1)^2.$$

D'une part, la résolution de l'équation (1), quadratique en v, fournit

$$2v(b_0 b_2 - b_1^2) + a_0 b_2 + a_2 b_0 - 2a_1 b_1 = \{(4b_0 b_2 - b_1^2) C(v) + \\ + (a_0 b_2 + a_2 b_0 - 2a_1 b_1)^2 - 4(a_0 a_2 - a_1^2)(b_0 b_2 - b_1^2)\}^{1/2},$$

d'où, en profitant des notations introduites et de l'identité $a_0 b_2 + a_2 b_0 - 2a_1 b_1 = 0$, il suit

$$2v\, C(u_0) = \sqrt{4C(u_0)\, C(v) - g_3}$$

$$= \sqrt{4s^3 - g_3}$$

ou

$$2v\, C(u_0) = \sqrt{S},$$

en posant

$$S = 4s^3 - g_3.$$

D'autre part, la différentiation de l'équation (1) par rapport

à s et v donne

$$3s^2 ds = C(u_0)\, dC(v)\,.$$

Cette formule se transforme à cause de la relation $dC(v) = \sqrt{S}\, dv$ en

$$3s^2 ds = C(u_0)\, \sqrt{S}\, dv$$

ou

$$\frac{3ds}{\sqrt{S}} = \frac{dv\, \sqrt[3]{C(u_0)}}{\sqrt[3]{C^2(v)}}\,.$$

En remplaçant enfin v par $\dfrac{1}{u - u_0}$ et en ayant égard aux relations

$$u - u_0 = \frac{C'(u)}{2(a_0 a_2 - a_1{}^2)}\,,$$

$$C(u) = (u - u_0)^2\, C(v)\,,$$

$$C(u_0) = \frac{g_3}{4(a_0 a_2 - a_1{}^2)}\,,$$

nous obtenons

$$\frac{du\, \sqrt[3]{g_3(a_0 a_2 - a_1{}^2)}}{\sqrt[3]{C^2(u)\, C'^2(u)}} + \frac{3ds}{\sqrt{S}} = 0\,,$$

d'où résulte, en posant

$$(a_0 a_2 - a_1{}^2) g_3 = G\,,$$

la forme définitive de l'équation différentielle :

$$(2) \qquad \frac{du\, \sqrt[3]{G}}{\sqrt[3]{C^2(u)\, C'^2(u)}} + \frac{3ds}{\sqrt{S}} = 0\,.$$

En résumé nous pouvons prononcer le théorème suivant:

L'équation différentielle cubique

$$G\left(\frac{du}{dz}\right)^3 = C^2(u)\,C'^2(u),$$

où

$$C(u) = (a_0u + a_1)(a_2u + a_3) - (a_1u + a_2)^2,$$

$$C'(u) = 2(a_0a_2 - a_1^2)u + a_0a_3 - a_1a_2,$$

$$G = (a_0a_2 - a_1^2)g_3,$$

$$g_3 = 4(a_0a_2 - a_1^2)(a_1a_3 - a_2^2) - (a_1a_2 - a_0a_3)^2$$

se transforme dans l'équation différentielle de Weierstrass

$$9\left(\frac{ds}{dz}\right)^2 = 4s^3 - g_3$$

au moyen de la formule de transformation

$$s^3 = \frac{G\,C(u)}{C'^2(u)},$$

de sorte qu'à la valeur numérique $s = \infty$ correspond la valeur $u = u_0$, où

$$u_0 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{2(a_0a_2 - a_1^2)}.$$

En comparant ce résultat aux formules que j'ai établies dans la note citée ci-dessus, il mérite d'être signalé que là c'est aux valeurs $z = z_0$, $u = u_0$ prises arbitrairement, qu'ici c'est aux valeurs $z = z_0$, $u = u_0$ données par les constantes de l'équation différentielle que correspond la valeur numérique $s = \infty$. Voilà la même différence qui existe entre la transformation li-

néaire, à laquelle F. Caspary [1] à donné une forme très élégante, et la transformation quadratique due à Weierstrass, des équations différentielles de deuxième degré.

On voit aisément comment ce théorème peut être généralisé à des équations différentielles binômes d'un degré plus haut et dont les intégrales cessent d'être elliptiques. Nous nous contentons d'indiquer le résultat suivant, en conservant la notation ci-dessus :

L'équation différentielle du degré μ

$$G^{\nu}\left(\frac{du}{dz}\right)^{\mu} = C^{\mu-\nu}(u)\, C'^{2\nu}(u),$$

où μ, ν *désignent des nombres entiers, se transforme dans l'équation différentielle de deuxième degré*

$$\mu^2\left(\frac{ds}{dz}\right)^2 = 4s^{\mu} - g_3$$

au moyen de la formule de transformation

$$s^{\mu} = \frac{G^{\nu}\, C^{\nu}(u)}{C'^{2\nu}(u)},$$

de sorte que la valeur $u = u_0$ *correspond à* $s = \infty$.

Berlin, 29 octobre 1905.

---

[1] *Journ. de Math.* (4) 5, 73-79, 1889.

NOTA SOBRE OS COEFFICIENTES DAS FORMULAS DE «WARING»

POR

J. B. DE ALMEIDA AREZ
(Tenente de Engenheria)

I — Nesta nota vamos fazer conhecer algumas propriedades dos coefficientes das formulas de WARING:

$$(1)\qquad s_n = \sum n \frac{(-1)^i (i-1)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\ldots\lambda!}\, p_1{}^\alpha\, p_2{}^\beta \ldots p_m{}^\lambda$$

e

$$(2)\qquad p_n = \sum \frac{(-1)^i}{\alpha,\,\beta,\ldots\lambda!} \left(\frac{s_1}{1}\right)^\alpha \left(\frac{s_2}{2}\right)^\beta \cdots \left(\frac{s_n}{n}\right)^\lambda,$$

onde o sommatorio se estende a todos os valores inteiros, positivos ou nullos, de α, β, $\ldots\lambda$ que verificam a condição

$$\alpha + 2\beta + \ldots + m\lambda = n,$$

onde é

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = i$$

e onde por s_n designamos a somma

$$x_1{}^n + x_2{}^n + \ldots + x^n{}_m,$$

sendo $x_1, x_2 \ldots x_m$ as m raizes da equação:

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m = 0.$$

II — Consideremos a identidade

$$\operatorname{Log} x - \operatorname{Log}(1+x) = \operatorname{Log}\frac{x}{1+x} = \operatorname{Log}\left(1 - \frac{1}{1+x}\right).$$

Derivando n vezes e applicando para isso ás funcções $y = \log u$, $u = 1 - \dfrac{1}{1+x}$ a formula conhecida ([1])

$$y^{(n)} = \sum \frac{n!\, f^{(i)}(u)\, u'^{\alpha}\, u''^{\beta} \ldots (u^{(n)})^{\lambda}}{\alpha!\, \beta! \ldots \lambda!\, (2!)^{\beta} (3!)^{\gamma} \ldots (n!)^{\lambda}},$$

onde $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ representam as soluções inteiras, positivas ou nullas, da equação

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + n\lambda = n,$$

e onde é

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = i,$$

a qual determina a derivada relativamente a x da funcção y definida pelas equações $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, deduz-se a identidade seguinte:

$$(-1)^{n-1}(n-1)!\left[\frac{1}{x^n} - \frac{1}{(1+x)^n}\right]$$

$$= \sum \frac{n!(-1)^{i-1}(i-1)!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!}\left(\frac{1+x}{x}\right)^i \left[\frac{1}{(1+x)^2}\right]^{\alpha} \left[\frac{-1}{(1+x)^3}\right]^{\beta} \ldots \left[\frac{(-1)^{n-1}}{(1+x)^{n+1}}\right]^{\lambda}$$

([1]) Vej. Gomes Teixeira, *Curso de Analyse* (Calculo differencial), cap. V.

e portanto

$$\frac{(1+x)^n}{x^n} - 1 = \sum n \frac{(i-1)!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!} \frac{1}{x^i},$$

ou, mudando x em $\frac{1}{x}$,

$$(1+x)^n - 1 = \sum n \frac{(i-1)!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!} x^i.$$

D'esta formula deduz-se, em primeiro logar, pondo $x = 1$, a seguinte:

$$(3) \qquad 2^n - 1 = \sum n \frac{(i-1)!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!},$$

que determina a somma dos valores absolutos de todos os coefficientes de (1), suppondo n'esta formula $n \overline{\gtrless} m$.

Deduz-se da mesma formula, egualando os coefficientes das mesmas potencias de x nos dois membros, a seguinte:

$$(3') \qquad \binom{n}{i} = \sum' n \frac{(i-1)!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!},$$

que determina a somma dos valores absolutos dos coefficientes da formula considerada em que i tem um mesmo valor.

Por ser

$$\binom{n}{n-i} = \sum' n \frac{(n-i-1)!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!}$$

e

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i},$$

vê-se que a somma dos valores absolutos dos coefficientes da formula de Waring, correspondentes aos termos em que a

somma dos expoentes de p_1, p_2, etc. é egual a i, tem o mesmo valor que a somma dos que correspondem aos termos em que a somma dos mesmos expoentes é egual a $n-i$.

Derivando n vezes a identidade

$$-\log x = \log \frac{1}{x},$$

empregando para obter a derivada do segundo membro a formula geral acima escripta, pondo, para isso, $y = \log u$, $u = x^{-1}$, vem

$$(4) \qquad -1 = \sum n \frac{(-1)^i (i-1)!}{\alpha! \beta! \ldots \lambda!}.$$

Das formulas (3) e (4) deduz-se que *a somma dos coefficientes positivos da formula* (1) *é egual a* $2^{n-1}-1$ *e a dos negativos a* 2^{n-1} (*se fôr* $n \leqq m$).

III — Para estudar os coefficientes da formula (2) partimos das identidades

$$x = e^{\log x}$$

e

$$\frac{1}{x} = e^{-\log x}.$$

Da primeira deduz-se (sendo $n \geqq 2$)

$$0 = \sum \frac{(-1)^i}{\alpha! \beta! \ldots \lambda!} \left(\frac{1}{1}\right)^\alpha \left(\frac{1}{2}\right)^\beta \cdots \left(\frac{1}{n}\right)^\lambda$$

e da segunda

$$-1 = \sum \frac{1}{\alpha! \beta! \ldots \lambda!} \left(\frac{1}{1}\right)^\alpha \left(\frac{1}{2}\right)^\beta \cdots \left(\frac{1}{n}\right)^\lambda,$$

d'onde: a *somma dos coefficientes positivos da formula* (2) *é egual a somma dos coefficientes negativos e egual a* $\frac{1}{2}$ (suppõe-se $n \geqq 2$).

Podiamos deduzir este theorema partindo da conhecida formula de Cotes

As formulas

$$s_1 = -p_1$$

$$s_2 = p_1{}^2 - 2p^2$$

$$s_2 = -p_1{}^3 + 3p_1p_2 - 3p_3$$

$$s_4 = p_1{}^4 - 4p_1{}^2p_2 + 4p_1p_3 + 2p_2{}^2 - 4p_4$$

. . . .

e

$$p_1 = -s_1$$

$$p_2 = \frac{1}{2}s_1{}^2 - \frac{1}{2}s_2$$

$$p_3 = -\frac{1}{2.3}s_1{}^3 + \frac{1}{2}s_1s_2 - \frac{1}{3}s_3$$

$$p_4 = -\frac{1}{2.3.4}s_1{}^4 - \frac{1}{2.2}s_1{}^2s_2 + \frac{1}{3}s_1s_3 + \frac{1}{2^22}s_2{}^2 - \frac{1}{4}s_4.$$

. . . .

que se encontram em quasi todos os tratados de Algebra, permittem verificar os resultados que aqui apresentamos.

Nota. — A formula (3′) dá tambem a seguinte:

$$\frac{(n-1)!}{(i-1)!}\binom{n}{i} = \sum{}' \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}$$

que traduz uma propriedade dos coefficientes de uma formula relativa ao desenvolvimento das funcções implicitas, dada pelo sr. dr. Gomes Teixeira no *Journal de Mathématique* de Liouville (3.ª série, t. VII).

APPLICATION D'UN THÉORÈME CONNU SUR LA MULTIPLICATION DE DEUX MATRICES À LA GÉOMÉTRIE POLYDIMENSIONALE

PAR

P. H. Schoute

(Professeur à l'Université de Groningue)

---

1. Considérons dans l'espace linéaire E_{kp+p-2} à $kp+p-2$ dimensions la courbe rationnelle C^{kp+p-2} représentée par rapport à un système de coordonnées homogènes x_i, $(i=0, 1, \ldots, kp+p-2)$ par les équations

$$\rho x_i = \lambda^i, (i=0, 1, .., kp+p-2) \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Désignons par ${}^{kp-1}E_{kp-2}$ un espace E_{kp-2} contenant $kp-1$ points de la courbe C^{kp+p-2}.

Alors on a le théorème:

«Le lieu des espaces ${}^{kp-1}E_{kp-2}$ de la courbe C^{kp+p-2} passant par un espace E_{k-2} donné est une variété conique V^p_{kp+p-3} de l'ordre p à $kp+p-3$ dimensions, dont E_{k-2} tient lieu de sommet».

Commençons par démontrer que le lieu cherché admet en effet $kp+p-3$ dimensions. A cette fin nous remarquons que chaque E_{kp-2} contient ∞^{kp-2} points, ce qui involve que les ∞^{kp-1} espaces ${}^{kp-1}E_{kp-2}$ contiennent ∞^{2kp-3} points. D'un autre côté il est évident que la condition de passer par l'espace E_{k-2} donné équivaut à celle de passer par $k-1$ points indépendants, tandis qu'à leur tours chacune de ces $k-1$ conditions que l'espace E_{kp-2} de E_{kp+p-2} passe par un point donné équivaut

à p conditions simples, de manière qu'on impose $(k-1)p$ conditions simples à cet E_{kp-2}, si on le contraint à passer par l'espace E_{k-2} donné. Donc le nombre des points contenus dans les espaces ${}^{kp-1}E_{kp-2}$ passant par E_{k-2} est $\infty^{2kp-3} : \infty^{(k-1)p} = \infty^{kp+p-3}$. Ainsi le lieu cherché a $kp+p-3$ dimensions, ce qui implique qu'il est représenté en E_{kp+p-2} par une équation unique. C'est la déduction de cette équation qui va nous occuper à présent.

Un point quelconque P de l'espace ${}^{kp-1}E_{kp-2}$ déterminé par les $kp-1$ points de C^{kp+p-2} correspondants aux valeurs déterminées $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_{kp-1}$ du paramètre λ est représenté par les équations

$$\rho x^i = m_1\lambda_1{}^i + m_2\lambda_2{}^i + .. + m_{kp-1}\lambda^i{}_{kp-1}, (i=0, 1, .., kp+p-2), \quad (2)$$

les $kp-1$ quantités $m_1, m_2, .., m_{kp-1}$ variant d'un point P à l'autre.

Si $y_i^{(1)}, y_i^{(2)}, .., y_i^{(k-1)}$ sont les coordonnées de $k-1$ points indépendants $P^{(1)}, P^{(2)}, .., P^{(k-1)}$ de E_{k-2}, les conditions que ce même espace ${}^{kp-1}E_{kp-2}$ passe par $P^{(1)}, P^{(2)}, .., P^{(k-1)}$ et donc par E_{k-2} sont

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_{(s)} y_i^{(s)} = m_1{}^{(s)}\lambda_1{}^i + m_2{}^{(s)}\lambda_2{}^i + .. + m_{kp-1}{}^{(s)}\lambda_{kp-1}{}^i, \\ (i=0, 1, \ldots, kp+p-2)\ (s=1, 2, .., k-1) \end{array}\right\} \ldots (3)$$

Le nombre des équations (2) et (3) est $k(kp+p-1)$ et surpasse donc d'une unité le nombre $(k+1)(kp-1)$ des inconnues $\lambda_i, m_i, m_i^{(s)}$. L'élimination de ces $(k+1)(kp-1)$ inconnues entre les $k(kp+p-1)$ équations fait trouver l'équation cherchée.

Nous démontrons que le résultat de l'élimination en question prend la forme $\Delta_{k,p}=0$, où $\Delta_{k,p}$ représente le déterminant à kp lignes et colonnes que l'on obtient en faisant suivre aux p lignes en x du schéma

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_2 & \ldots & x_{kp-1} \\ x_1 & x_2 & x_2 & \ldots & x_{kp} \\ x_2 & x_3 & x_4 & \ldots & x_{kp+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{p-1} & x_p & x_{p+1} & \ldots & x_{kp+p-2} \end{vmatrix}$$

les $k-1$ groupes de p lignes analogues, où les x_i ont été remplacées successivement par les $y_i^{(s)}$. En effet, en substituant en $\Delta_{k,p}$ les valeurs de x_1 et de $y_i^{(s)}$ tirées de (2) et de (3) on trouve que l'expression $\rho^p \sigma_{(1)}^p \sigma_{(2)}^p \ldots \sigma_{(k-1)}^p \Delta_{k,p}$ est égale aux produits de deux matrices $M^{(1)}_{kp,kp-1}$, $M^{(2)}_{kp,kp-1}$ à kp lignes et $kp-1$ colonnes, dont l'une $M^{(1)}$ admet les kp lignes

$$\left| \lambda_1{}^i \quad \lambda_2{}^i \quad \lambda_3{}^i \quad \ldots \quad \lambda_{kp+1}{}^i \right|,$$
$$(i=0, 1, \ldots, kp-1)$$

tandis que l'autre $M^{(2)}$ s'obtient en faisant suivre aux p lignes en m_i du schéma

$$\left| \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 & \ldots & m_{kp-1} \\ m_1 \lambda_1 & m_2 \lambda_2 & m_3 \lambda_3 & \ldots & m_{kp-1} \lambda_{kp-1} \\ m_1 \lambda_1{}^2 & m_2 \lambda_2{}^2 & m_3 \lambda_3{}^2 & \ldots & m_{kp-1} \lambda_{kp-1}{}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_1 \lambda_1{}^{p-1} & m_2 \lambda_2{}^{p-1} & m_3 \lambda_1{}^{p-1} & \ldots & m_{kp-1} \lambda_{kp-1}{}^{p-1} \end{matrix} \right|$$

les $k-p$ groupes de p lignes analogues, où les m ont été remplacées successivement par les $m^{(s)}$ correspondantes. Et d'après un théorème connu le produit de ces deux matrices $M_{kp,kp-1}{}^{(1)}$, $M_{kp,kp-1}{}^{(2)}$ disparaît identiquement, le nombre kp des lignes surpassant le nombre $kp-1$ des colonnes. Évidemment la démonstration de ce théorème auxiliaire se déduit de la remarque que le produit des deux matrices $M_{kp,kp-1}{}^{(1)}$, $M_{kp,kp-1}{}^{(2)}$ est égal à celui des deux déterminants $D_{kp}{}^{(1)}$, $D_{kp}{}^{(2)}$ à kp lignes et colonnes que l'on obtient en ajoutant à chacune des deux matrices une colonne composée d'éléments zéro.

Après la substitution en $\Delta_{k,p}$ des valeurs des x_1 tirées de (1), ce déterminant possède p lignes égales

$$\left| 1 \quad \lambda \quad \lambda^2 \quad \ldots \quad \lambda^{kp-1} \right|;$$

donc la courbe C^{kp+p-2} est une courbe multiple d'ordre de multiplicité $p-1$ du lieu cherché. D'un autre côté la substitution

$x_i = y_i^{(s)}$ donne à $\Delta_{k,p}$ p couples de lignes égales. Donc le lieu cherché est un espace conique dont chacun des points $P^{(s)}$ est un sommet. Ainsi le théorème posé est démontré.

Nous terminons par la remarque que la variété conique V_{k-1}^{kp+p-2} de l'ordre $kp+p-2$ à $k-1$ dimensions qui est le lieu des espaces E_{k-1} passant par l'espace-sommet E_{k-2} et un point variable de la courbe C^{kp+k-2} est une variété multiple de l'ordre de multiplicité $p-1$ du lieu trouvé V^p_{kp+p-3}.

CONFÉRENCE FAITE AU MUSEUM DE PARIS A L'OCCASION DE LA VISITE DE S. M. LE ROI DE PORTUGAL D. CARLOS I

PAR

M. H. Moissan

Sire :
Monsieur le Président de la République :

Il y a une douzaine d'années, un froid de −50° était difficile à réaliser pratiquement dans le laboratoire, aujourd'hui nous descendons facilement avec l'air liquide et l'hydrogène à −257°.

Il en est de même pour les températures élevées. A la même époque, il était difficile de maintenir longtemps une expérience à une température de 1300 à 1400°. Le chalumeau oxhydrique fournissait au maximum 1800 degrés centigrades, mais la combustion de l'hydrogène dans l'oxygène, produisant un milieu oxydant, limitait le nombre des expériences.

Avec le four électrique, nous pouvons atteindre aujourd'hui des températures qui, d'après M. Violle, sont voisines de 3500°.

On savait, depuis Humphry Davy, qui a découvert l'arc électrique, que sa température était très élevée, mais on ne possédait pas d'appareil pratique de laboratoire permettant d'utiliser cette source énorme de chaleur.

Le four que nous avons imaginé n'a pour lui que son extrême simplicité. Il consiste en un bloc de carbonate de chaux portant une cavité pour recevoir le creuset et deux rainures pour laisser passer les électrodes. Un couvercle, de même substance, forme réverbère et réfléchit la chaleur sur le creuset.

••

Au moyen de cet appareil, nous avons pu démontrer qu'il n'existe plus de corps réfractaires. Les corps simples ou composés sont tous liquefiés, puis volatilisés. A cette haute température, nous faisons bouillir la chaux, la magnésie, le cristal de roche, le platine, le cuivre, l'or et le fer.

Un grand nombre de composés vont se détruire à cette température élevée, mais par contre, nous allons obtenir de nouvelles séries de composés stables dans ces conditions: tels les borures, les siliciures, et les carbures. Et c'est ainsi que nous avons préparé, avec facilité, dans ce four électrique, le carbure de calcium, point de départ de l'industrie de l'acétylène.

L'étude générale de ces carbures métalliques nous a conduit à une nouvelle théorie de la formation des pétroles.

De même, nous avons obtenu, avec facilité et en grande quantité, les métaux réfractaires dont certains n'étaient que des curiosités de laboratoire comme le chrome, le manganèse, le tungstène, le molybdène, le vanadium et le titane. Ces métaux se préparent aujourd'hui, industriellement au four électrique sous forme d'alliages avec le fer.

C'est aussi au moyen de cet appareil que nous avons pu préparer des kilogrammes de ce curieux métal l'uranium, dont mon cher confrère, M. Becquerel, vous entretenait il y a un instant.

Le four électrique nous a permis aussi d'étudier les différentes variétés de carbone et de démontrer comment on pouvait passer du carbone amorphe au graphite, et du graphite au diamant.

Pour obtenir le graphite, il suffit de chauffer une variété quelconque de carbone á la température du four électrique.

Pour réaliser la synthèse du diamant, il faut dissoudre le carbone dans le fer à une température voisine de 3000°. On plonge ensuite brusquement le métal en fusion dans l'eau froide. Dans ces conditions, il se forme autour du métal, une croûte extérieure solide, et la partie intérieure encore liquide se comprime en augmentant de volume et produit quelques parcelles de carbone cristallisé sous la forme diamant.

Ces expériences nous conduisent à de nouvelles conclusions. Le four électrique réalise les conditions reculées de la première période géologique de la terre au moment où notre planéte était encore incandescente. Tout le carbone et tout l'azote du régne animal et du régne végétal se trouvaient alors à l'état de carbures et d'azotures métalliques. Ces corps se sont décomposés

lorsque par suite du refroidissement de la terre, l'eau s'est produite à sa surface. Ils ont donné naissance à l'ammoniaque et au gaz carbonique utilisés pour le développement de la cellule vivante.

Enfin ces expériences peuvent élucider une autre grande question. Les astronomes discutent sur la température du soleil. Or comme cet astre est formé d'une masse en fusion produite par les mêmes corps simples que notre terre, tous ces corps sont à une température inférieure à 3500°, température maximum de notre four électrique. Nous avons démontré en effet que à cette température les corps les plus réfractaires entraient en ébullition et se transformaient en corps gazeux.

En conséquence, la température des couches extérieures du soleil ne doit pas atteindre cette température de 3500°.

FORMACION NATURAL DE LA HEMOGLOBINA

POR

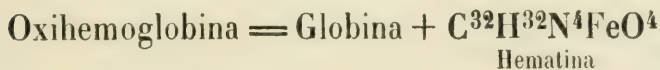
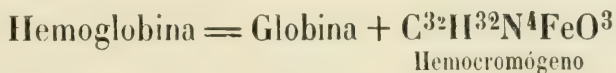
JOSÉ R. CARRACIDO

(Catedratico en la Universidad de Madrid)

La materia albuminoidea que tiñe de color rojo los eritrocitos de la sangre, se supone constituida por la asociacion de una proteina denominada *globina*, y un grupo prostético, por el cual ejerce el cromoproteido la funcion respiratoria, denominado *hematina*.

Fúndase esta suposicion en los resultados que se obtienen tratando convenientemente por los ácidos ó por los álcalis la hemoglobina y la oxihemoglobina.

$$\text{Hemoglobina} = \text{Globina} + \underbrace{C^{32}H^{32}N^{4}FeO^{3}}_{\text{Hemocromógeno}}$$

$$\text{Oxihemoglobina} = \text{Globina} + \underbrace{C^{32}H^{32}N^{4}FeO^{4}}_{\text{Hematina}}$$

¿ Bastan los resultados de la descomposicion efectuada por los ácidos ó por los álcalis para afirmar que los cuerpos resultantes son los que integran la molécula del cromoproteido?

Las moléculas complejas deben ser imaginadas como organismos constituidos por miembros que se enlazan mediante articulaciones, y al emplear reactivos para inquirir su estructura es muy posible que actúen, no como el escalpelo del disector

que va cortando las naturales coyanturas, sino como el hacha del carnicero que brutalmente reduce à trozos el cuerpo del animal sin tomar en cuenta las articulaciones. Segun muchos quimicos, principalmente los alemanes, la barita empleada por Schützenberger en la pesquisa de la estructura de las moléculas albuminoideas actúa como el hacha que destruye, y no como el escalpelo que diseca.

Los ácidos y los álcalis que descomponen la hemoglobina y su combinacion oxidada en la forma arriba expuesta actúan sobre las moléculas que escinden como escalpelo ó como hacha?

Los datos hasta hoy adquiridos inducen à sostener que el hemocromógeno y la hematina son los grupos prostéticos de la forma reducida y de la oxidada del proteido respiratorio. Sus mútuas relaciones como diferentes grados de oxidacion de un núcleo persistente, y sobre todo, la sintesis del cromoproteido realizada por Bertin-Sans y Moitessier asociando la hematina y la globina son testimonios muy valiosos de que los mencionados reactivos no destrozan, sino que disecan la molécula.

Pero atenuando el valor de los testimonios aducidos existen otros no tomados en cuenta, que no están en conformidad con lo que hoy se admite respecto à la constitucion del pigmento del eritrocito, y cuando se presentan hechos que no tienen cabida dentro del plano de los conceptos corrientes es forzoso hacer nuevo trazado, porque la ciencia no puede admittir casos ilegales. Las protestas que tienen fundamento real inmediatamente derrocan la legalidad estatuida por respetable que sea su historia.

*

* *

Siendo la funcion de la hemoglobina tomar oxigeno del medio ambiente para llevarlo à la intimidad de los tejidos, se supuso que el hierro contenido en el cromoproteido era el agente de cambio de aquel elemento por la facil transformacion de los compuestos ferrosos en férricos, y viceversa, ganando ó perdiendo oxigeno; y saliendo en la descomposicion del albuminoide respiratorio todo el hierro en el grupo prostético, se afirmó, como consecuencia bien deducida, que el hemocromógeno y la hema-

tina son respectivamente, por el átomo metálico que contienen, el receptor y el conductor del oxigeno en las fases sucesívas del proceso respiratorio.

El cálculo pone de manifiesto que la cantidad de oxigeno absorbida por la hemoglobina es cuatro veces mayor que la que puede absorber el hierro en ella contenido pasando al grado máximo de oxidacion, y ante esta diferencia ya no se pudo sostener que aquel elemento metálico era el único que realizaba la fijacion del oxigeno. Sabiendo ademas que el hemocromógeno al convertirse en hematina toma una cantidad de oxigeno inferior à la que absorbe la hemoglobina cuando se transforma en oxihemoglobina, tampoco es posible afirmar que el grupo prostético atribuido al proteido respiratorio sea el que con exclusion del resto de la molécula fije todo el oxigeno absorbido.

Segun investigaciones de Jaquet, publicadas ya en el año 1889, la proporcion de azufre de la hemoglobina varía con la procedencia, siendo tanto mayor respecto à la del hierro cuanto más grande sea la cantidad de oxigeno consumida por el animal.

Para dos átomos de hierro tiene cuatro de azufre la hemoglobina del caballo, seis la del perro y nueve la del pollo, de lo cual se infiere que para la absorcion del oxigeno debe ser más importante el papel del azufre que el del hierro contenidos en el albuminoide respiratorio.

Si segun lo comunmente aceptado, los proteidos desempeñan en los organismos sus especiales funciones mediante los grupos prostéticos, en vista de los datos antecedentes hay que admitir, ó que el de la oxihemoglobina no es la hematina porque no contiéne azufre, ó que el proteido en la totalidad de su molécula es el que efectua la absorcion del oxigeno.

El segundo punto de vista parece insostenible porque la globina disgregada de la hematina es semejante à las demás globulinas, y estas no muestran la propiedad de formar combinaciones con el oxigeno facilmente disociables, como tendria que suceder en el caso de que la proteina fuese colaboradora del grupo prostético en el acto respiratorio.

*

* *

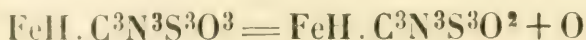
La reaccion Michailow figura entre las coloridas que se citan

como características de las materias albuminoideas, la cual, como es sabido, la producen estas desarrollando color rojo de sangre arterial mediante la disolucion de sulfato ferroso, ácido sulfúrico y unas gotas de ácido nítrico [1]. Las reacciones coloridas de los albuminoides no corresponden à la totalidad de la molécula, sinó à alguno de los grupos que la integran, y la Michailow fué atribuida à un grupo sulfociánico (CNS) productor del color rojo de sangre originado de la misma manera que el producido por el sulfocianato potásico al actuar sobre las sales férricas.

Comunmente se acepta que el sulfocianato potásico y las sales férricas producen por doble descomposicion sulfocianato férrico, pero en contra de esta creencia manifesté [2] que el compuesto rojo de sangre arterial, no debia ser el supuesto sulfocianato, sinó un producto de oxidacion à que daba origen el cloruro férrico, no por el radical metálico que lo forma, sinó por su caracter oxidante. En ausencia de todo compuesto de hierro, el ácido nítrico, el bioxido de hidrógeno, el agua de cloro y otros oxidantes producen con el sulfocianato la misma coloracion que el cloruro férrico, y cuando este es el que la origina, reductores como el ácido oxálico la hacen desaparecer sin que la sal férrica haya pasado à ferrosa, puesto que del líquido precipita *inmediatamente* azul de Prusia el ferrocianuro potásico.

Segun trabajos posteriores de TARUGI [3] el cumpuesto rojo formado sin la intervencion del hierro corresponde à la fórmula $H^3,C^3N^3S^3O^3$ que es la de un óxido del trimero del ácido sulfociánico (H,CNS), pero en presencia de aquel metal parte de su hidrógeno es sustituido, formandose entonces un compuesto mucho mas estable correspondiente á la formula $FeH,C^3N^3S^3O^3$, el cual es combinacion ferrosa, y no férrica, de un ácido peroxigenado. Este es capaz de ceder un átomo de oxigeno, solo por desecacion en el vacio en presencia del ácido sulfúrico transformándose de la manera siguiente:

$$FeH.C^3N^3S^3O^3 = FeH.C^3N^3S^3O^2 + O$$

---

(1) Vease mi nota sobre este punto en los *Anales de la Sociedad española de Fisica y Quimica.* — Tom. III, pag. 20.

(2) *Anales de la Sociedad española de Fisica y Quimica* — Tom. II, pag. 193.

(3) *Gazzetta Chimica Italiana.* Noviembre 4, 1904. pagg. 326-348.

En la reaccion MICHAILOW, como en la de los sulfocianatos con las sales férricas, el color rojo de sangre arterial es debido al producto de la polimerizacion y oxidacion del ácido sulfociánico.

*
* *

Admitida una serie filogénica de la molécula albuminoidea, de la cual es consecuencia la evolucion morfológica y fisiológica de los elementos organizados, hay que suponerse un proceso químico, en el que, por efecto de las acciones del medio ambiente, fué agrandándose la molécula primordial mediante la adquisicion de nuevos elementos químicos y de nuevos grupos moleculares. A los términos iniciales de las protaminas estudiados por KOSSEL debieron añadirse posteriormente, no solo los grupos cíclicos de los albuminoides más complejos, sinó tambien el azufre de las proteinas y el fósforo de las nucleinas.

Por la correlacion que en todos los casos se observa entre los datos biológicos y los químicos debe suponerse que la hemoglobina es uno de los albuminoides más modernos, porque prescindiendo de algunos gusanos que lo contienen difundido en sus hemolinfas, dicho albuminoide respiratorio solo está contenido en los glóbulos rojos de los vertebrados, es decir, en los términos superiores de la escala animal; de lo que tambien se infiere que en la cronologia de los elementos biogenésicos el hierro debe figurar en el último puesto; en el del mas moderno. Muéstrase conforme esta conclusion con la particularidad de ser el hierro entre los elementos biogenésicos el de peso atómico mas elevado revelando que el alcance de la *ley periódica* llega hasta la evolucion de la materia viva, y concuerda tambien aquella con la particularidad de ser el elemento mas dificilmente asimilable, dificultad revelada por la Naturaleza, y por ella prevista en el hecho de poner exceso de hierro en el organismo del recien nacido, y en cambio, casi excluirlo de la leche, única insuficiencia por la cual no le corresponde en absoluto el título de alimento completo.

*

* *

Poniendo en cotejo todos los datos que aportan las precedentes observaciones, ya no resulta violento abandonar la idea de la constitucion de la hemoglobina por la asociacion de la hematina, y en cambio recordando la proporcionalidad del azufre con la importancia de los cambios respiratorios, parece lógico suponer que en el curso de la filogenia química, mediante reacciones análogas à la MICHAILOW; y en tèrminos mas sencillos, por reaccion análoga à la de los sulfocianatos con el cloruro férrico, albuminas y globulinas convenientemente oxidadas produjeron el cromoproteido concurriendo el hierro à dar estabilidad al grupo oxisulfociánico.

Las oxidasas, cuyo papel es fundamental en todo género de acciones fisiológicas, debieron ser allá en el origen, y deben ser en la actualidad las transformadoras de las proteinas en hemoglobina porque el ozono administrado en la dosis de 11 à 12 centesimas de miligramo por litro de aire, segun observaciones de Labbè y Oudin [1] en el breve tiempo de 10 à 15 minutos aumenta en 1 por 100 la proporcion de la hemoglobina de la sangre, y este rápido incremento está mas en armonia con las condiciones en que se produce el compuesto rojo de la reaccion MICHAILOW que con las en que habria de formarse un cuerpo tan complejo como la hematina, cuya estructura, aunque se cree ya esclarecida refiriéndola à la del butilpirrol como núcleo de la molécula, todavia está ignorada en un punto tan importante cual es el modo de engaste del átomo de hierro.

*

* *

Ia en el año 1879 discurriendo Pflüger acerca del origen de la materia viva redujo este problema al del origen de la albúmina,

---

[1] Compt. Rend. Ac. Sc.: tom. CXIII, pag. 141.

y en sus disquisiciones llegó à la conclusion de que el ácido ciánico ($H.CNO$) debió ser allá en el curso de los procesos geológicos el núcleo primordial de la materia albuminoidea creciendo la molécula de esta hasta alcanzar la magnitud con que aparece en la obra arquitectónica de la organizacion por la capacidad del núcleo para polimerizarse, capacidad que se patentiza en los laboratorios al producirse las ciamélidas ($H\ CNO)^n$.

La célula es la unidad de la organizacion, y el ascenso de todos los grados de la escala de la vida, hasta llegar à los tèrminos superiores, se efectúa, no mediante elementos absolutamente nuevos, sinó formando asociaciones de la misma unidad que al asociarse se diferencia; de igual manera las moléculas albuminoideas adquieren su tamaño gigantesco por la polimerizacion de su núcleo primordial, y al producirse los grados supremos de la diferenciacion química que constituyen los grupos prostéticos de los proteidos no varia el procedimiento como se ve en las bases púricas y pirimídicas formadoras de los ácidos nucleínicos, las cuales en último analisis resultan derivadas de grupos ciánicos.

Considerando el grupo prostético de la oxihemoglobina como resultado de la polimerizacion del ácido oxisulfociánico, entra este caso particular en el general de complicarse las formaciones elaboradas en el proceso biológico por repeticion con diferenciacion ulterior de los factores primordiales.

Desde los varios puntos de vista que se ha examinado la hemoglobina creo que, no obstante la sintesis efectuada por Bertin-Sans y Moitessier, es mas razonable que lo hoy generalmente aceptado, admitir que en la reaccion Michailow se produce artificialmente una metamorfosis química análoga à la que en el desarrollo de la serie filogénica formó naturalmente la hemoglobina sobre la base de las albúminas y las globulinas no coloridas que constituyen en los organismos inferiores las *acroglobinas* de funcion respiratoria.

Segun Pflüger, con la formacion del ácido ciánico se inició la de las materias albuminoideas, y estas mediante la polimerizacion de aquel y el engarce de cadenas amino-ácidas fueron agrandando su molécula hasta constituir las proteinas formadoras de los citoplasmas. Nuevas moléculas ciánicas asociadas al ácido fosfórico forman el grupo prostético de las nucleinas que en la diferenciacion de la materia viva constituyen la parte principal

del núcleo celular. Finalmente, moléculas oxisulfociánicas asociadas al hierro forman el grupo prostético del cromoproteido respiratorio.

Aceptadas las ideas precedentes respecto à la constitucion de la hemoglobina, muéstrase en todos los casos el proceso químico de la materia formadora de la organizacion como resultado de la diferenciacion del mismo núcleo fundamental.

A OBRA SCIENTIFICA E A VIDA DO CHIMICO PORTUGUEZ ROBERTO DUARTE SILVA

POR

A. J. Ferreira da Silva

(Continuação)

IV

De 1875 a 1881 occupou-se Roberto D. Silva de investigações interessantes ácerca da acção do gaz iodhydrico sobre os diversos compostos organicos; e, com os dados colhidos, poude resolver questões ainda por liquidar, particularmente a da constituição do ether glycerico e do chloroiodeto de propyleno.

Os effeitos do acido iodhydrico sobre as materias organicas, abstrahindo d'aquelles em que ha fixação dos elementos do acido, reduziam-se até elle ou a uma subtracção de oxygenio ou a uma substituição do iodo ou outro elemento halogenico pelo hydrogenio, isto é, a uma hydrogenação directa. Era esta a summula dos resultados de longas e sabias investigações effectuadas por V. de Luynes, Lautmann, e principalmente pelo Sr. Berthelot. Mas todos estes chimicos empregavam o acido iodhydrico ou no estado nascente, ou em soluto concentrado, mas a temperaturas mais ou menos elevadas.

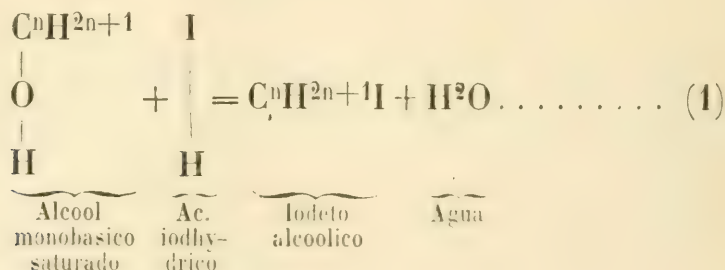
O nosso eminente compatriota ensaiou, pelo contrario, a acção do gaz iodhydrico secco sobre as materias organicas mantidas a uma temperatura comprehendida entre 0° e 4°, ou mesmo inferior.

Foi levado a estas pesquizas durante o estudo d'alguns etheres, no intento de os separar dos carbonetos ethylenicos C^nH^{2n}, que por vezes os acompanhavam. A separação de taes corpos, ambos muito volateis, não se podia realisar por distillação fraccionada; mas realisar-se-ia talvez, pensou ROBERTO SILVA, pelo acido iodhydrico a *baixa temperatura*, condição em que se fixaria certamente o carboneto C^nH^{2n} por addição directa, sem actuar sobre o ether.

Mas, realisada a experiencia, desde logo reconheceu que o gaz iodhydrico era absorvido em proporção muito superior á que exigia o hydrocarboneto; e, distillando o producto, notou ROBERTO SILVA que o ether fôra quasi completamente transformado.

Foi este incidente que o levou a estudar, de um modo particular, a *acção do gaz iodhydrico*, nas condições especiaes ainda não ensaiadas, *sobre os etheres* (1).

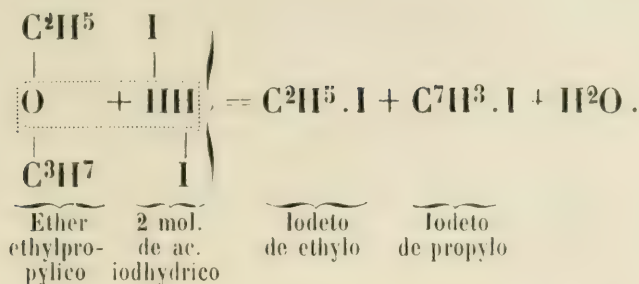
Notemos, antes de proseguir, que na acção do acido iodhydrico sobre os alcooes saturados, o oxygenio oxhydrylico se transforma em agua, formando-se um iodeto alcoolico

$$\underbrace{\begin{matrix} C^nH^{2n+1} \\ | \\ O \\ | \\ H \end{matrix}}_{\substack{\text{Alcool} \\ \text{monobasico} \\ \text{saturado}}} + \underbrace{\begin{matrix} I \\ | \\ | \\ | \\ H \end{matrix}}_{\substack{\text{Ac.} \\ \text{iodhy-} \\ \text{drico}}} = \underbrace{C^nH^{2n+1}I}_{\substack{\text{Iodeto} \\ \text{alcoolico}}} + \underbrace{H^2O}_{\text{Agua}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

No caso dos etheres propriamente ditos e mixtos, em que não havia oxygenio oxhydrylico, pensava-se, sem demonstração, que se formavam dois iodetos alcoolicos, sendo o oxygenio que ligava os dois radicaes do ether transformado em agua pelo hydrogenio

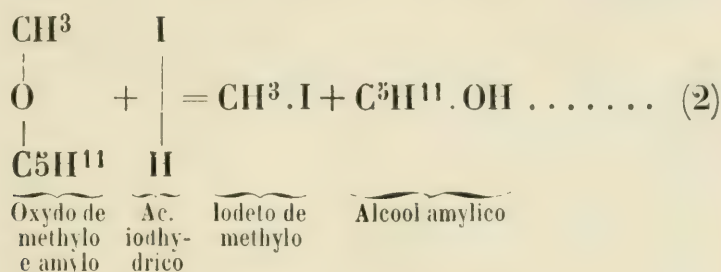
(1) A exposição dos resultados d'estas experiencias encontra-se na memoria intitulada: *«De l'action de l'acide iodhydrique à basses températures sur les éthers proprements dits et les éthers mixtes». Annales de chimie et de physique*, 5e série, t. VII, 1876, pagg. 425–432. Foi com o mesmo titulo publicado um resumo nos *Comptes rendus*, t. LXXXI, pagg 323–325.

de acido iodhydrico:

$$\begin{matrix} C^2H^5 & & I & \\ | & & | & \\ O & + & HH & = C^2H^5.I + C^7H^3.I + H^2O. \\ | & & | & \\ C^3H^7 & & I & \end{matrix}$$

Ether ethylpropylico — 2 mol. de ac. iodhydrico — Iodeto de ethylo — Iodeto de propylo

Mas não é assim que as coisas se passam. De facto, fazendo actuar o acido iodhydrico sobre o ether ethylamylico, notou Roberto Duarte Silva que elle se transformava integralmente em iodeto de methylo e em alcool amylico, segundo a equação:

$$\begin{matrix} CH^3 & & I & \\ | & & | & \\ O & + & | & = CH^3.I + C^5H^{11}.OH \; \ldots\ldots \quad (2) \\ | & & | & \\ C5H^{11} & & H & \end{matrix}$$

Oxydo de methylo e amylo — Ac. iodhydrico — Iodeto de methylo — Alcool amylico

no fundo analoga á reacção representada pela equação (1) da pagina anterior.

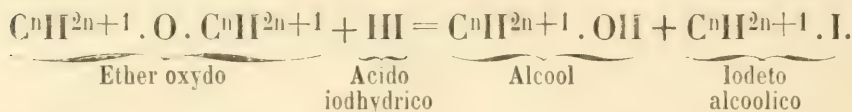
Roberto Silva pensou então que a reacção seria geral; que se devia dar quer com os etheres oxydos mixtos, quer com os propriamente ditos; e que, portanto, na acção do acido iodhydrico sobre os etheres, só uma parte d'estes se transformava num iodeto, e que esta transformação só seria completa, no caso em que o alcool formado na primeira phase fosse transformado em iodeto, por virtude de uma reacção secundaria, determinada por influencia do acido iodhydrico.

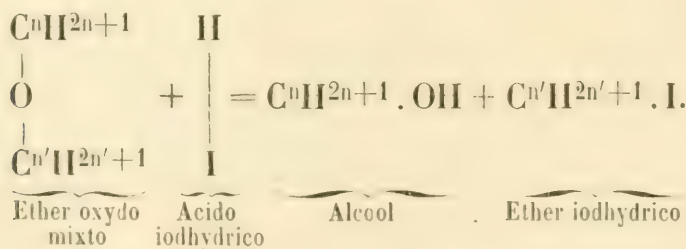
Ensaiando primeiro a acção do acido iodhydrico sobre os alcooes monatomicos anhydros, verificou que o alcool methylico $CH^3.OH$ era completamente transformado em iodeto; mas que os alcooes propylico e isopropylico $C^3H^7.OH$, o isobutylico $C^4H^9.OH$ e o amylico $C^5H^{11}.OH$ só fornecem quantidades muito pequenas de iodetos.

Dos etheres oxydos propriamente ditos ensaiou: o oxydo de methylo $CH^3.O.CH^3$, o de ethylo $C^2H^5.O.C^2H^5$, os de propylo e isopropylo $C^3H^7.O.C^3H^7$, o de isobutylo $C^4H^9.O.C^4H^9$ e o de amylo $C^5H^{11}.O.C^5H^{11}$; e, dos etheres mixtos, o oxydo de ethylo e amylo $C^2H^5.O.C^5H^{11}$, o de isoproepylo e amylo C^3H^7(iso)$.O.C^5H^{11}$; e por ultimo estudou especialmente a reacção sobre os etheres mixtos, taes como o oxydo de propylo e de methylo $C^3H^7.O.CH^3$, o de butylo e de methylo $C^4H^9.O.CH^3$, o de amylo e methylo $C^5H^{11}.O.CH^3$ e o de ethylo e methylo $C^2H^5.O$ CH^3 [1] em que um dos radicaes é o methylo.

Do conjuncto das experiencias realisadas, deduziu as tres proposições seguintes:

1.ª Quando se faz actuar o gaz iodhydrico sobre um ether propriamente dito, arrefecido entre 0° e +4°, dá-se entre os dois corpos uma dupla decomposição, da qual resulta a formação do alcool e a do iodeto alcoolico correspondentes:

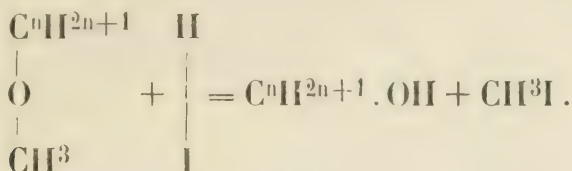
$$\underbrace{C^nH^{2n+1}.O.C^nH^{2n+1}}_{\text{Ether oxydo}} + \underbrace{HI}_{\text{Acido iodhydrico}} = \underbrace{C^nH^{2n+1}.OH}_{\text{Alcool}} + \underbrace{C^nH^{2n+1}.I.}_{\text{Iodeto alcoolico}}$$

2.ª Quando se faz reagir o gaz iodhydrico sobre um ether mixto, arrefecido entre 0° e 4°, dá-se ainda uma dupla decomposição, substituindo-se mutuamente o hydrogenio do acido iodhydrico, e o radical menos rico em carbono, de sorte que se forma um iodeto do radical hydrocarbonado menos rico em carbono, e um alcool correspondente ao radical mais carbonado:

$$\underbrace{\begin{matrix} C^nH^{2n+1} \\ | \\ O \\ | \\ C^{n'}H^{2n'+1} \end{matrix}}_{\text{Ether oxydo mixto}} + \underbrace{\begin{matrix} H \\ | \\ | \\ | \\ I \end{matrix}}_{\text{Acido iodhydrico}} = \underbrace{C^nH^{2n+1}.OH}_{\text{Alcool}} + \underbrace{C^{n'}H^{2n'+1}.I.}_{\text{Ether iodhydrico}}$$

sendo n maior que n'.

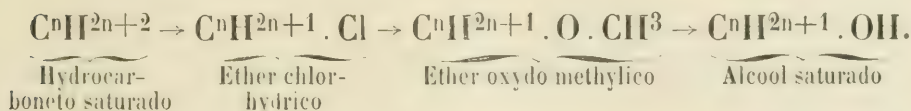
---

[1] *Bulletin de la Société chimique de Paris*, 2e serie, t. XXV, pag. 529.

3.° Todos os etheres oxydos mixtos em que um dos radicaes é o methylo, arrefecidos entre 0° e 4°, são transformados pelo gaz iodhydrico em iodeto de methylo e no alcool correspondente ao outro radical:

$$\begin{array}{l} C^nH^{2n+1} \\ | \\ O \\ | \\ CH^3 \end{array} + \begin{array}{l} H \\ | \\ | \\ | \\ I \end{array} = C^nH^{2n+1}.OH + CH^3I.$$

Esta proposição é um caso particular da 2.ª, mas merece ser referida especialmente, por virtude da nitidez notavel com que se realisa.

Dá-nos, além d'isso, um *meio muito facil e commodo de passar de um hydrocarboneto saturado para o alcool correspondente.* É, com effeito, muito facil passar de taes hydrocarbonetos para os seus derivados monochlorados; e estes, por meio de um soluto de potassa no alcool methylico, transformam-se muito facilmente no ether mixto $C^nH^{2n+1}.O.CH^3$; uma vez obtido este ether, a acção do gaz iodhydrico transforma-o no alcool que se queria obter:

$$\underbrace{C^nH^{2n+2}}_{\text{Hydrocarboneto saturado}} \rightarrow \underbrace{C^nH^{2n+1}.Cl}_{\text{Ether chlorhydrico}} \rightarrow \underbrace{C^nH^{2n+1}.O.CH^3}_{\text{Ether oxydo methylico}} \rightarrow \underbrace{C^nH^{2n+1}.OH.}_{\text{Alcool saturado}}$$

As leis precedentemente expostas referem-se á acção do gaz iodhydrico sobre os etheres oxydos dos alcooes monatomicos saturados. Applicar-se-hão ellas tambem aos etheres oxydos dos alcooes não saturados? Foi para resolver este ponto que Roberto D. Silva estudou os productos da reacção do gaz iodhydrico sobre o ether allylmethylico $C^3H^5.O.CH^3$, arrefecido entre 0° e 4°; a judiciosa interpretação que o auctor deu aos resultados da experiencia mostra ainda que a lei se applica a estes etheres.

Os productos d'esta reacção são: iodeto de methylo CH^3I, iodeto de isopropylo C^3H^7I e iodo livre; o primeiro está directamente de accordo com a lei enunciada; o segundo, o iodeto de isopropylo, resulta de duas acções secundarias, a saber: 1.° a acção do acido iodhydrico sobre o alcool allylico, que dá o iodeto de

allylo, producto directo da reacção; 2.° a transformação do iodeto de allylo, nas mesmas condições de temperatura, em iodeto de isopropylo, sob a acção do gaz iodhydrico:

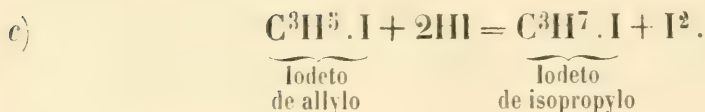
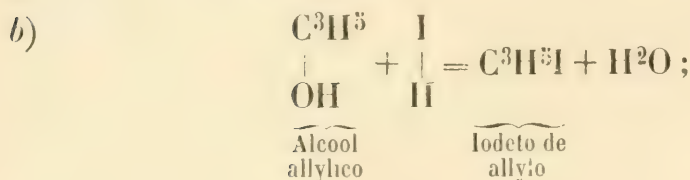
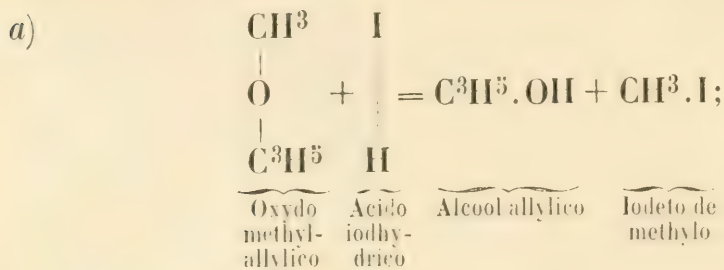
a)

$$\underbrace{\begin{matrix} CH^3 \\ | \\ O \\ | \\ C^3H^5 \end{matrix}}_{\text{Oxydo methyl-allylico}} + \underbrace{\begin{matrix} I \\ | \\ H \end{matrix}}_{\text{Acido iodhydrico}} = \underbrace{C^3H^5.OH}_{\text{Alcool allylico}} + \underbrace{CH^3.I}_{\text{Iodeto de methylo}};$$

b)

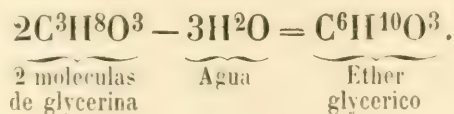
$$\underbrace{\begin{matrix} C^3H^5 \\ | \\ OH \end{matrix}}_{\text{Alcool allylico}} + \begin{matrix} I \\ | \\ H \end{matrix} = \underbrace{C^3H^5I}_{\text{Iodeto de allylo}} + H^2O;$$

c)

$$\underbrace{C^3H^5.I}_{\text{Iodeto de allylo}} + 2HI = \underbrace{C^3H^7.I}_{\text{Iodeto de isopropylo}} + I^2.$$

Esta interpretação foi justificada pelo estudo experimental cuidadoso da acção do acido iodhydrico sobre o alcool allylico e sobre o iodeto de allylo, á temperatura de 0° a 4° (1).

Vejamos agora como estas pesquizas poderam servir para illucidar a constituição de alguns corpos organicos.

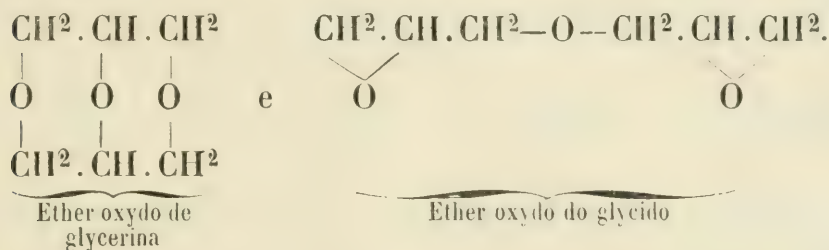
O *ether glycerico* é um corpo de formula $C^6H^{10}O^3$, correspondente á reunião de 2 moleculas de glycerina com eliminação de 3 moleculas de agua:

$$\underbrace{2C^3H^8O^3}_{\text{2 moleculas de glycerina}} - \underbrace{3H^2O}_{\text{Agua}} = \underbrace{C^6H^{10}O^3}_{\text{Ether glycerico}}.$$

GEGERFELT poude separá-lo por distillação do residuo negro e abundante que se obtem quando se prepara o alcool allylico pelo aquecimento da glycerina com o acido oxalico; LINNEMANN

(1) *Bulletin de la Societé chimique de Paris*, 1875, t. XXIV, pag. 482.

e **Zotta** encontravam-no, quasi ao mesmo tempo, distillando a glycerina com o chloreto de calcio ([1]). O mesmo corpo foi obtido por **Tollens** e **Loe** na distillação da glycerina com 2 % de chloreto de ammonio, e por **Berthelot** e de **Luca** na acção da potassa sobre a iodhydrina. É um corpo liquido, um pouco espesso, incolor e quasi inodoro, soluvel na agua e insoluvel no alcool e no ether, de densidade 1,1453 a 0°, e fervendo a 170°; reduz o soluto ammoniacal do acetato de prata e os dos chloretos de ouro e de platina; precipita em vermelho o soluto de **Fehling**, e transforma os solutos dos chloretos ferrico e mercurico em saes no minimo.

Roberto Silva não só completou o estudo das propriedades do novo corpo, como resolveu o problema da sua constituição.

As duas formulas racionaes que se lhe podiam attribuir, e que **Gegerfelt** reproduz na sua memoria, são:

A primeira representa, com as tres ligações exteriores pelo oxygenio, um verdadeiro ether oxydo de glycerina — um oxydo do radical triatomico, o glycerylo C^3H^5; a segunda, com as duas ligações interiores pelo oxygenio, e uma só externa, representa o ether oxydo do *glycido*, esse corpo interessante, anhydrido interno e alcool, que **Hanriot** preparou na acção do oxydo de bario sobre a monochlorhydrina de glycerina ([2]).

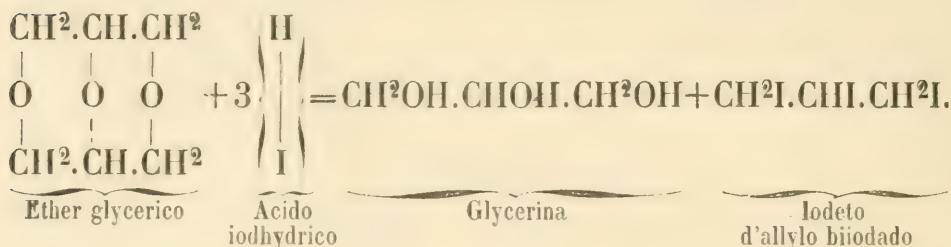
Gegerfelt suppunha esta segunda formula mais provavel; o nosso eminente patricio demonstrou, pelo contrario, que era a primeira que se devia adoptar, e é essa, de facto, que está consignada hoje nos modernos tratados ([3]).

([1]) H. v. **Gegerfelt**, *Uber den sogenannten Glycerinäther*, in *Berichte der deutsch. chem. Gesellschaft*, t. IV, pagg. 919-921.

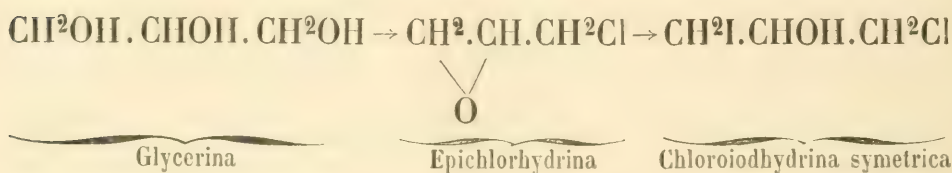
([2]) *An . de chimie et de physique*, 5e série, t. XVII, pag. 112.

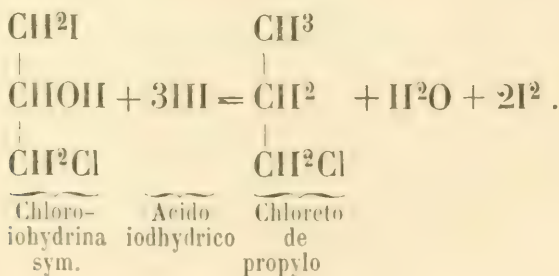
([3]) Entre outros, em **Beilstein**, *Handbuch der org. Chemie*, 3.e Aufl., Hambourg e Leipzig, 1893, t. I, pag. 314; **Berthelot** et **Jungfleisch**, *Chimie organique*, t. I, 4e édit., Paris, 1898, pag. 374.

Com effeito, o ether glycerico tratado a 0° pelo gaz iodhydrico, comporta-se como um verdadeiro ether oxydo, dando glycerina e iodeto d'allylo biiodado:

$$\underbrace{\begin{array}{ccc} CH^2. & CH. & CH^2 \\ | & | & | \\ O & O & O \\ | & | & | \\ CH^2. & CH. & CH^2 \end{array}}_{\text{Ether glycerico}} + 3\underbrace{\left|\begin{array}{c} H \\ | \\ I \end{array}\right|}_{\text{Acido iodhydrico}} = \underbrace{CH^2OH.CHOH.CH^2OH}_{\text{Glycerina}} + \underbrace{CH^2I.CHI.CH^2I}_{\text{Iodeto d'allylo biiodado}}.$$

Por uma acção secundaria, determinada pelo acido iodhydrico, este ultimo é depois transformado em iodeto de isopropylo.

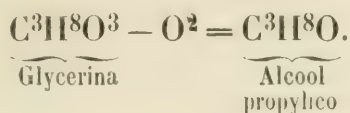
Como complemento d'este estudo, estudou ROBERTO D. SILVA a acção do gaz acido iodhydrico sobre a cloroiodhydrina symetrica, que REBOUL obtivera combinando a epichlorhydrina, derivada da glycerina, com o acido iodhydrico:

$$\underbrace{CH^2OH.CHOH.CH^2OH}_{\text{Glycerina}} \rightarrow \underbrace{CH^2.CH.CH^2Cl}_{\substack{\diagdown\,\diagup \\ O \\ \text{Epichlorhydrina}}} \rightarrow \underbrace{CH^2I.CHOH.CH^2Cl}_{\text{Chloroiodhydrina symetrica}}$$

e conseguiu transformá-la em chloreto de propylo normal, correspondente ao alcool propylico C^3H^8O [1]:

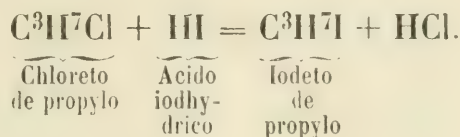
$$\underbrace{\begin{array}{c} CH^2I \\ | \\ CHOH \\ | \\ CH^2Cl \end{array}}_{\text{Chloro-iohydrina sym.}} + \underbrace{3HI}_{\text{Acido iodhydrico}} = \underbrace{\begin{array}{c} CH^3 \\ | \\ CH^2 \\ | \\ CH^2Cl \end{array}}_{\text{Chloreto de propylo}} + H^2O + 2I^2.$$

Resultado este muito importante, porque representa a transfor-

(1) Estes trabalhos constam da nota intitulada: *Sur la constitution de l'éther glycérique et sur la transformation de l'épichlorhydrine en alcool propylique normal*, in *Comptes rendus*, t. XCIII, 1881, pagg. 418-421.

mação de um alcool triatomico saturado, a glycerina, no alcool monatomico saturado tendo o mesmo numero de atomos de carbono, o alcool propylico: — problema este que tinha sido atacado por diversos chimicos sem successo:

$$\underbrace{C^3H^8O^3}_{\text{Glycerina}} - O^2 = \underbrace{C^3H^8O}_{\text{Alcool propylico}}.$$

N'esta reacção consignou tambem um facto curioso: a formação de uma pequena proporção de iodeto de propylo normal, mas só quando se não affastava o chloreto de propylo, á medida que elle se formava.

De sorte que se devia attribuir a geração de iodeto á dupla troca entre o chloreto de propylo e o acido iodhydrico:

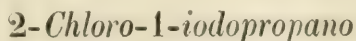
$$\underbrace{C^3H^7Cl}_{\text{Chloreto de propylo}} + \underbrace{HI}_{\text{Acido iodhydrico}} = \underbrace{C^3H^7I}_{\text{Iodeto de propylo}} + HCl.$$

Este facto, apurado com muita sagacidade, serviu-lhe de base para poder determinar a constituição do *chloroiodeto de propyleno*, que estava incerta, depois dos trabalhos de Sorokin, chimico russo, publicados em 1870 ([1]).

Observou, de facto, Sorokin que aquecendo o chloroiodeto de ethyleno ou chloroiodopropano, que ferve a 148° a 149°, com um soluto de acido iodhydrico se obtinha como unico producto da reacção o iodeto de isopropylo $CH^3 . CHI . CH^3$.

Ficava para decidir, accrescentava o chimico russo, se o chloroiodeto de propyleno devia ser:

$$CH^3 . CHCl . CH^2I,$$

que na linguagem de hoje se chama:

2-*Chloro*-1-*iodopropano*

([1]) *Berichte der deuts. chem. Gesellschaft*, t. III, 1870, pag. 626.

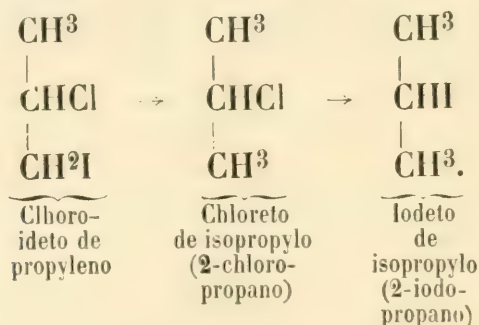
ou antes:

$$CH^3 . CHI . CH^2Cl,$$

que actualmente se denomina:

2-*Iodo*-1-*chloropropano*.

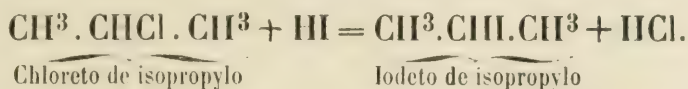
Propoz Roberto Silva a primeira formula, que é hoje a admittida [1]; e deu a explicação da reacção, que se faz em duas phases: na primeira o acido iodhydrico muda o chloroiodeto de propyleno em chloreto de isopropylo; na segunda, o chloreto de isopropylo é transformado pelo gaz iodhydrico em iodeto, reacção que deve dar-se, como se dá a passagem do chloreto de propylo para o iodeto, já indicada:

$$\underbrace{\begin{array}{c} CH^3 \\ | \\ CHCl \\ | \\ CH^2I \end{array}}_{\text{Chloro-ideto de propyleno}} \rightarrow \underbrace{\begin{array}{c} CH^3 \\ | \\ CHCl \\ | \\ CH^3 \end{array}}_{\text{Chloreto de isopropylo (2-chloro-propano)}} \rightarrow \underbrace{\begin{array}{c} CH^3 \\ | \\ CHI \\ | \\ CH^3. \end{array}}_{\text{Iodeto de isopropylo (2-iodo-propano)}}$$

Mas, para que a interpretação fosse definitivamente acceite, era necessario demonstrar que o chloreto de isopropylo era o termo intermedio da reacção. Para isso tomou R. Silva um soluto concentrado de acido iodhydrico, no qual determinou a proporção de acido iodhydrico; aqueceu a banho-maria, em matrazes fechados á lampada, moleculas eguaes de chloroideto de propyleno e acido iodhydrico, e obteve n'estas condições uma quantidade notavel de chloreto de isopropylo $CH^3 . CHCl . CH^3$, de ponto de ebulição de cerca de 36°. E assim concluiu que no chloroiodeto de propyleno o chloro está reunido ao atomo do carbono central.

Para completar a demonstração, transformou directamente o

[1] Beilstein, *ob cit.*, pag. 192.

chloreto de isopropylo em iodeto do mesmo radical pela acção do acido iodhydrico; bastou-lhe para isso aquecer a banho-maria, em matrazes fechados, moleculas eguaes dos dois corpos; de 40 gr. de chloreto de isopropylo que empregou apenas 3 ou 4 se não transformaram:

$$\underbrace{CH^3.CHCl.CH^3}_{\text{Chloreto de isopropylo}} + HI = \underbrace{CH^3.CHI.CH^3}_{\text{Iodeto de isopropylo}} + HCl.$$

Se agora se realisar a experiencia fazendo reagir o acido iodhydrico em excesso, sob a forma de corrente, sobre o chloroiodeto de propyleno aquecido a banho de agua a 100°, e se recolherem em agua esfriada os productos da reacção, não se obtem a menor parcella de chloreto de isopropylo, mas sim iodeto do mesmo radical.

Não pode ser mais completa a demonstração (¹).

No decurso d'estas experiencias, demonstrou que o producto da acção do chloreto d'iodo sobre o propyleno não é uma mistura de dois chloroidetos, mas um só chloroiodeto, que corresponde á formula $CH^3.CHCl.CH^2I$ (²).

(Continúa).

(¹) As notas em que este assumpto está tratado por R. D. Silva são: *Action de l'acide iodhydrique sur le chloroiodure de propylène et sur le chloroiodure d'isopropyle*, in *Comptes rendus*, t. XCIII, pag. 739.

(²) *Comptes rendus*, t. XCIII, 1881, pagg. 739–741.

O CAPITALISMO E AS SUAS ORIGENS EM PORTUGAL

POR

BENTO CARQUEJA

(Continuação)

III

As origens do capitalismo

Póde affirmar-se que a era capitalista principia, verdadeiramente, com o seculo XVI [1]. É então que o regimen capitalista se manifesta, com este triplice caracter: 1.º tendencia para a divisão progressivamente mais perfeita do trabalho, e, como consequencia necessaria, para o emprego das machinas; 2.º concentração crescente dos capitaes e dos instrumentos de trabalho nas mãos dos *chefes industriaes*; 3.º creação de duas classes antagonicas, animadas de paixões hostis e cujos interesses de cada vez se revelam em maior desacordo.

É certo que a revolução individualista e a revolução industrial dos fins do seculo XVIII precipitaram o apparecimento do regimen capitalista; mas não foram ellas que lhe deram origem.

Na Revolução Francêsa fez-se ouvir o grito das reindivicações operarias; mas, antes d'isso, antes da lei francêsa de 1791, que

---

[1] HENRI HAUSER, *Revue d'Economie Politique*, 16.º anno, n.º 4.

fez surgir acceso conflicto entre o capital e o trabalho, existia já o regimen capitalista.

Vem, effectivamente, de mais longe essa origem e tem de ser necessariamente procurada no tempo em que numerosas industrias, se bem que apparentemente modeladas ainda no velho regimen, começam a experimentar a influencia da nova economia social, e a constituir-se em pequenas oligarchias capitalistas, bastante restrictas, quasi hereditarias.

Volvamos os olhos para a Renascença e ahi encontraremos as origens do capitalismo moderno ; d'alli o acompanharemos, atravez dos tempos, n'uma evolução constante, como o patriarchalismo das sociedades primitivas, como o feudalismo da idade media.

Foi, sem duvida, no seio do regimen corporativo que se esboçaram as origens do capitalismo moderno, como, seguramente, sobre a actual sociedade capitalista se está esboçando o edificio de uma sociedade nova, a sociedade futura. A evolução domina profundamente os phenomenos sociaes.

Não praticariamos erro se fossemos aos seculos XIII e XIV investigar as diversas manifestações do credito, que tornaram possivel a concentração do capital. Effectivamente, após as cruzadas, desenvolve-se o commercio do Levante, animam-se as feiras em diversos pontos da Europa, passando-se do periodo da economia natural para o da economia-dinheiro. Surge, dest'arte, o predominio das classes, que manipulam esse dinheiro, especialmente os judeus e a Ordem dos Templarios, que, no dizer de LÉOPOLD DELISLE (1), constituiu o primeiro grande banco internacional de depositos.

As grandes feiras do seculo XIII offerecem um singular e interessantissimo espectaculo a quem as contemple, tanto sob o ponto de vista ethnographico, como sob o economico. Misturam-se n'ellas os mais diversos povos, trocam-se as mercadorias de affastadas regiões, dá-se uma nova e mais larga feição aos negocios.

A credito, n'uma forma embryonaria, começa a produzir pro-

(1) L. DELISLE, *Mémoire sur les opérations financières des Templiers* : 1889.

digios: — já se não reclamam para penhor apenas especies monetarias; bastam objectos materiaes, que possam dar algum proveito ao possuidor d'elles. Assim se explica como o contracto de mutuo mais antigo seja o de commandita ([1]).

A quantia emprestada é convertida em valor equivalente de fazendas, couros, etc., que o capitão do navio ou o carreiro conduzem a Ceuta e a outros pontos. Era uma commandita a largo risco, *in fortuna Dei*. Se as mercadorias chegassem a porto e salvamento, seriam vendidas em proveito da sociedade e o transportador teria direito, por exemplo, a 20 por cento de lucro. Algumas vezes, a commandita complicava-se com operações de cambio de moedas, abrangendo pagamentos a realisar, em pontos por vezes bem distantes, á data das feiras ou em prasos prefixados, tanto ao proprio prestamista como ao seu representante. Assim, apparece no anno de 1200 a primeira letra de cambio.

Nas grandes feiras, que centralizavam o commercio das especiarias do Levante e dos pannos do Occidente, eram conhecidos os pagamentos por compensação. Pouco era o dinheiro, que andava de mão em mão: trocavam-se, especialmente, penhores, de forma que, no fim da feira, as lojas dos cambistas constituiam verdadeiramente aquillo que hoje se chama um *clearing-house*.

Na industria apparece o uso das vendas a praso. A principio, a lei prohibia-as; mas os curtidores de Troyes acharam meio de illudir a lei e obtiveram do rei, em 1339, o direito de comprar e vender couros a praso e de fazer até dois reportes successivos ([2]).

Todavia, na opinião de **Konrad Haebler**, só no principio do seculo XII appareceram os negocios propriamente de letras, cambio e dinheiro, com certo desenvolvimento ([3]).

Todas as grandes casas de commercio tratavam de negocios de letras e transferencias de dinheiro entre os diversos paises; mas estas operações eram propriamente um accessorio do prin-

---

([1]) Fagniez, *Doc. rel. à l'hist. du commerce et de l'industrie.*
([2]) Fagniez, *Ob. cit.*
([3]) Haebler, *Die Geschichte der Fugger'schen Handlung in Spanien* pag. 5.

cipal ramo de negocio, o qual consistia no trafico de mercadorias. Os negocios bancarios constituiam apenas um appendice dos negocios meramente commerciaes.

Os emprestimos de dinheiro eram feitos geralmente consignando ao banqueiro quaesquer rendimentos, até ao reembolso das quantias mutuadas. Muitas vezes, esses rendimentos refeeriam-se a propriedades, minas, etc.

Os Fuggers, que davam leis em materia de finança, prefeeriam esta forma de realizar negocios financeiros.

Como os negocios bancarios feitos com os governos excediam, em geral, os recursos de que um só capitalista podia dispôr, formaram se para cada caso especial sociedades com duração limitada, com responsabilidade tambem limitada para com os socios, e liquidação logo depois de concluido o negocio ([1]).

Os Fuggers tiveram importantes negocios em Espanha e Portugal, reservando-nos para fallar d'estes mais adiante.

O governo espanhol convidou, por vezes, os negociantes nacionaes e extrangeiros (estes desde 1522) a tomarem participação nas frotas commerciaes, que enviava ás Molucas, garantindo não só uma percentagem no lucro total, proporcionalmente á entrada, como tambem o reembolso do capital, com 20 por cento de juro, no caso de não ir por diante a expedição. Quem entrasse com 20:000 ducados tinha o direito de mandar um commissario, que acampanharia a frota. Em algumas das expedições, os estrangeiros, sobretudo os allemães, contribuiram com quasi tres quartas partes do capital ([2]).

Tambem em Espanha os Fuggers tiveram de fornecer frequentes vezes os materiaes (madeira, cobre, canhamo, etc), para o armamento das frotas da India.

Os negocios financeiros feitos pelos Fuggers, em Hespanha, eram de duas cathegorias:

1.ª *Asientos*, ou negocios em que para pagamento do debito contrahido eram consignados ao crédor rendimentos cobrados em prasos fixos. Essas consignações consistiam, geralmente, em impostos ou rendas de propriedades. Os credores rece-

---

([1]) K. Haebler, *Ob. cit.* pag. 7.
([2]) K. Haebler, *Ob. cit.* pag. 49.

biam esses pagamentos das mãos dos contratadores dos impostos, que, por seu turno, os cobravam; mas casos havia em que os proprios Fuggers figuravam como cobradores de tributos.

2.ª *Credito e socorros,* ou negocios em que eram feitos emprestimos com garantias e cuja importancia era, em geral, pequena. Entravam n'esta cathegoria os pagamentos, que os Fuggers tinham de fazer no estrangeiro, por ordem do governo espanhol, aos embaixadores de Espanha, etc. ([1])

Os Fuggers exerceram, incontestavelmente, influencia benefica no desenvolvimento da agricultura e da exploração mineira em Espanha; prestavam-se a collocar vantajosamente n'aquelle país capitaes, que lhes eram confiados para esse fim ([2]).

O estabelecimento espanhol dos Fuggers só deixou de existir no meiado do seculo XVII.

Todos estes factos encaminham para a concentração do capital industrial; foi, na verdade, o commercio que operou a concentração dos primeiros capitaes; é a industria que passa a utilisa-los.

Ao lado do tecelão, por exemplo, que vende o panno tecido por elle proprio e pelos seus officiaes e aprendizes, apparece o mercador burguez, mais ou menos abastado, que não tece, mas que emprega, por sua conta, uma porção de tecelões, afinadores, tintureiros, etc.; limita-se o seu papel a fornecer a lã aos mestres tecelões das dezasete cidades productoras de pannos e a vender esses pannos nas feiras ou nas Escalas do Levante.

Fagniez faz notar que esse papel representa o primeiro signal da «distincção entre commerciantes capitalistas e industriaes que executam as encommendas d'elles» ([3]). Essa organisação capitalista encontra-se, por exemplo, em França, na Allemanha e na Italia.

Para se ter largo conhecimento do commercio do Levante é preciso lêr a obra especial de HEYD «GESCHICHTE DES LEVANTEHANDELS IM MITELLALTER» (Stuttgart, 1879, I vol.)

([1]) K. HAEBLER, *Ob. cit.* pag. 118.
([2]) K. HAEBLER, *Ob. cit.* pag. 233 e 235.
([3]) FAGNIEZ, *Ob. cit.* II.

Abrange a historia d'esse commercio tres periodos, segundo Heyd: 1.° *Os inicios* (da invasão dos barbaros ás cruzadas; 2.° *A florescencia*) fundação das colonias commerciaes do Oriente, Syria e Asia Menor, exploração da Asia Central, desde o fim do seculo XIII até fins do seculo XIV; 3.° *Decadencia* (esgotamento das nações maritimas do Mediterraneo, ruina dos caminhos para a Asia e atravez da Asia, descoberta de um novo caminho pelos portugueses).

O primeiro periodo refere-se, especialmente, á epocha do imperador Justiniano e tempo dos seus successores; ao apparecimento de Mahomet, até ao começo das cruzadas. O segundo periodo menciona os Estados fundados pelos cruzados na Syria, abrangendo as colonias commerciaes existentes e os fócos do commercio de Levante n'esses Estados, Bysancio sob, o dominio de Comnenos e Angeli, o imperio latino, a ilha de Chypre, a Armenia, o Egypto, o imperio grego, sob o governo dos Paleologos, os senhorios francos contemporaneos, existentes na Grecia até á celebração do tratado de Turim (1381), a Bulgaria, a Asia Menor turca, as caminhos ou vias commerciaes do sul, partindo do Oriente para o Mediterraneo, as novas regiões e vias commerciaes abertas pelos tartaros (a Armenia menor, Trebizonda, Persia, os paises da India, as colonias nas margens septentrionaes do *Pontus,* a Asia Central e a China). O terceiro periodo refere-se aos turcos gregos e francos na peninsula balcanica (1381-1453) á Asia menor turca, aos ultimos tempos do imperio de Trebizonda, ao destino e fim das colonias nas margens septentrionaes do *Pontus,* á Asia Central, China e Persia e, por ultimo, ao apparecimeuto dos portuguêses nas Indias e á conquista da Egypto pelos turcos.

São curiosos, no livro de Heyd, os capitulos respeitantes á peninsula iberica, especialmente pelas informações que encerram sobre o commercio dos catalães com a Syria, com o Egypto, com o imperio bysantino, com as ilhas do archipelago grego, etc.

Observa-se que já em 1290 concedia o imperador Andronico plena liberdade commercial aos catalães, nos seus dominios, e que, no fim do seculo XII, tinham influencia consideravel em Tyro (Syria). Cerca de 1293 (1180) apparecem os catalães occupando uma posição consideravel em Chypre e na Armenia.

O celebre codigo de direito maritimo «*Consolat del Mar*» é

o mais importante e mais seguido para o regulamento do commercio do Mediterraneo, nos seculos XIV e XV ([1]).

A influencia dos catalães no Occidente europeu luctou vantajosamente com a dos genovezes e dos venezianos, até á tomada de Constantinopla (1290-1453). Mas deve observar-se que são tambem importantes as informações sobre Montpellier e seu valioso commercio com o Oriente, por isso que esta importante cidade, sujeita á dynastia de Aragão, como Barcelona, desde 1204, deveu a esse commercio a sua propriedade.

Do papel que Portugal desempenhou no mesmo commercio occupar-nos-hemos mais adiante.

Á face do 2.° volume da obra de Heyd, podemos estabelecer a seguinte relação das mercadorias, que constituiam o commercio com o Oriente e dos compradores d'ellas:

Mercadorias — Especie humana (escravos) — Productos naturaes; — 1, pedra hume; 2, aloes; 3, ambar; 4, balsamo; 5, algodão; 6 benjoim; 7, pau Brazil; 8. sandalo; 9, costus; 10, pedras preciosas; 11, marfim; 12, ruivo e outras materias tinturiaes; 13, linho; 14, galanga; 15, gallas tinctoria; 16 cravo; 17, indigo; 18, gengibre; 19, camphora; 20 cardamomo; 21, grã; 22, coral, 23, lacca; 24, ladanum: 25, manná; 26, resina-mastix; 27, almiscar; 28, mumia; 29, nóz moscada; 30, mirobolãs; 31, perolas; 32, pimenta negra; 33, pimenta branca; 34, pimenta comprida; 35, rhuibarbo; 36, cassia fistula; 37, açafrão; 38, sandalos differentes; 39, scamonio; 40, seda (como materia prima); 41, astragalo; 42, tutia; 43, incenso; 44, zedoar; 45, canella; 46, assucar. Productos manufacturados — 1, vidro; 2, fio de prata e de ouro; 3, porcellana; 4, tecidos varios: lã, algodão, seda, brocados.

Compradores, pela sua ordem: — França, paises de Flandres, Espanha e Portugal, Inglaterra, Allemanha, Scandinavia e Russia.

([1]) Traducção commentada — Consulat de la Mer ou pandectes du droit commercial et maritime faisant loi en Espagne, en Italie, à Marseille et en Angleterre et consulté partout ailleurs, comme raison écrite — Traduit du catalan en français d'après l'édition originale de Barcelone de l'an 1494... por P. B. Boucher. Paris 1808, II vol.

Passado assim em revista o commercio com o Oriente, fallemos agora dos judeus.

Por tal fórma os judeus exerciam a usura, que não tardaram a provocar os protestos dos povos e até medidas repressivas, as quaes partiram especialmente da Igreja. Effectivamente, esta chegou a prohibir-lhes que tirassem lucros excessivos, obrigando-os, em certos casos, á restituição. Assim, em diversos synodos realisados, no seculo XIII, em Avinhão, Narbona, etc., declarou-se que se devia impedir os judeos de praticar a usura, excomungando todos os christãos, que se deixassem arrastar a tratar com elles negocios d'esse genero ([1]).

Não se julgue, porém, que um grande principio de equidade determinasse o procedimento da Igreja. Invocava-se o principio do *justo preço (justum pretium)* das coisas, para todos os generos serem vendidos por preço equitativo; mas, como demonstra GIRARD, a noção de *justo preço* não é estrictamente equivalente aos gastos da producção; não é, portanto, a condemnação do principio do *accrescimo de valor* ([2]). N'estes termos, a noção do preço fica singularmente elastica e o accrescimo de valor póde ir tão longe quanto se queira, principalmente fóra do mercado local. Era por isso que nem o commercio do Levante, nem as grandes feiras se submettiam ao *justo preço*. O commercio do Levante, especialmente, permittia realisar lucros consideraveis porque se exercia em mercadorias riquissimas, com peso diminuto.

Explica-se pela usura uma boa parte das perseguições soffridas pelos judeus e que se manifestaram sob variadas formas, entre as quaes se destaca a de pesados tributos. Ricardo Coração de Leão obrigou-os a pagarem um imposto equivalente á decima terceira parte das rendas do Estado.

Em todo o caso, nos primeiros assomos do capitalismo, no seculo XIII, a figura do judeu apparece-nos dominante: —dominando as sociedades, porque, senhores de fortunas colossaes, até aos proprios reis emprestavam dinheiro; dominando o commercio, porque dependiam d'elles os recursos para alimentar as communicações entre a Europa e as outras partes do mundo; dominando

---

([1]) CH. HÉFELÉ. *Histoire générale des conciles*

([2]) GIRARD, *Histoire de l'économie sociale jusqu' à la fin du* XVI^e^ *siècle.*

a industria, porque tinham nas suas mãos os destinos de fabricas importantissimas e, portanto, a sorte dos seus operarios; dominando, emfim, os negocios, com a pujança da sua actividade e a valia dos seus recursos pecuniarios.

Examinemos ainda outra face da questão:

A constituição dos *mesteres* ou *officios* dá-nos o singular aspecto da organização do trabalho no seculo XII.

O *mestereiro* precisava, para exercer o seu mister, de qualidades pessoaes e recursos (posses).

Os estatutos francezes dos *métiers* dizem expressamente: *Quiconques veut estre de tel mestier, estre le puet poer tant qu'il sache le mestier et ait de coi»* [1].

As posses precisas para os differentes mesteres variavam muito, sendo certo que houve sempre grandes differenças nos limites, que lhes eram marcados. Assim, no seculo XIII havia em Pariz, segundo o «*Registre de la taille*» (1292), um chapelleiro, com 19.000 francos de rendimento annual; um fabricante de pannos, com 9.000; varios, com mais de 5.000; mais de cem com rendimento superior a 1.000; tendo a maior parte rendimento superior a 250 francos.

Martin-Saint-Léon, no seu livro «*Histoire des corporations*» (1897) menciona os seguintes rendimentos: Mais de 1.000 francos, 1; 5.000 a 10.000 francos, 6; 1.000 a 5.000 francos, 121; 250 a 1.000 francos, 375; 50 a 250 francos, 821.

Houve sempre enormes differenças entre os rendimentos de artifices do mesmo officio. Por exemplo: entre os fabricantes de tecidos de lã de Francfort s/M, no seculo XIV, havia onze que tinham o direito de fabricar 36 peças de panno e 49 que só podiam fabricar 4 peças [2].

Na legislação allemã, franceza e ingleza dos seculos XIV e XV acha-se nitidamente expressa a affirmação de que o artifice aspirava a ganhar o bastante para viver e *não mais*, cada qual dentro dos seus limites.

Assim, a formação dos mesteres, com todas as suas disposições e legislação, tendentes a regularisar a producção e a venda dos

---

[1] E. Levasseur, *Histoire des classes ouvrières et de l'industrie en France*, pag. 79.

[2] W. Sombart, *Der Moderne Kapitalismus*, I, pag. 82.

productos, não tinha caracter essencialmente capitalista. Destinava-se, sobretudo: 1.º a facilitar a producção, tornando independente o artifice; 2.º a transmittir e conservar o saber technico e os segredos do officio; 3.º a promover uma legislação, interna e externa, favoravel aos mesteres (1).

Segundo Werner Sombart, as condições fundamentaes para a existencia dos mestereiros eram as seguintes:

I. Condições de população:
a) Augmento progressivo da população.
b) Augmento da densidade da população.

II. Condições technicas de producção e venda:
a) Estabilidade dos preços das materias primas:
b) Condições technicas da producção proprias do mestereiro, por exemplo, pouca variedade nos productos a fabricar, ausencia de *modas*, longo tempo empregado em fabricar um objecto.
c) Venda segura n'um mercado estavel e firme, em que não haja desequilibrio entre compra e producção, antes um excesso do pedido sobre a producção.
d) Desenvolvimento seguro do mercado, motivado pelo augmento das classes compradoras, que cresçam mais rapidamente do que a classe dos fabricantes.
e) Permanencia e estabilidade dos preços a uma altura grande, absoluta, em comparação com os preços das materias primas (2).

A epocha em que estas condições se aproximam mais da sua realisação simultanea foi o começo da Idade Media.

Na Idade Media tambem, a accumulação de grandes sommas de dinheiro e a formação de grandes conjunctos de propriedades materiaes de toda a especie constituiram-se: na *camera* apostolica, nas ordens religiosas de cavallaria, nas mãos dos reis de França e da Inglaterra, nos senhorios e nas cidades.

1.º *Na camera apostolica.* — Já no seculo XIII estava aperfeiçoada a organisação financeira pontificia, cujas bases foram lan-

---

(1) W. Sombart, *Ob. cit.*, I, pag. 130.
(2) W. Sombart, *Ob. cit.*, I, pag. 159.

çadas por Innocencio III (1198 e 1216). As rendas, dadivas, impostos, etc., vindos de toda a parte, eram transformados em moeda.

Os maiores rendimentos provinham das decimas para as cruzadas. As sommas provenientes d'esse imposto, que não era annual, são calculadas, no seculo XIII, em 3.500 a 4.500 contos de reis, moeda actual.

Clemente V deixou na Curia um thesouro, cujo valor é calculado em mais de 2.300 contos, moeda actual.

2.º *Ordens religiosas da cavallaria.*—As sommas accumuladas pelas ordens religiosas de cavallaria eram consideravelmente superiores ás da Curia romana. Provinham, geralmente, de rendimentos de terrenos e propriedades, que se espalhavam por todo o mundo conhecido.

Os Templarios tinham, no seculo XIV, propriedades em toda a Europa.

O numero de solares dos Templarios era, no seculo XIII, de 9.000; em 1307, era de 10.500. O dos Hospitaleiros era de 19.000.

Cada solar podia sustentar um cavalleiro e armal-o, o que correspondia a um rendimento annual dos Hospitaleiros de 7.000 contos de reis e dos Templarios de 9.000 contos.

MICHELET define n'estas conceituosas palavras o caracter dos Templarios: «Com taes privilegios, taes riquezas e taes dominios era-lhes bem difficil manterem-se humildes» [1].

E um insuspeito historiador portuguez caracterisa n'estes termos o procedimento dos mesmos Templarios: «Entrára o grão-mestre em França, vindo de Chypre, aonde se retirára com os mais catholicos na ultima e infausta derrota da Palestina. No mesmo anno se tiraram inquirições dos costumes depravados e infames dos Templarios e no de 1307 já estava preso o grão-mestre e sessenta e tantos cavalleiros» [2].

3.º *Reis de França.* — Nos seculos XIII e XIV, o rendimento annual dos reis de França era de 800 a 1.000 contos.

---

(1) J. MICHELET, *Histoire de France*, IV, pag. 29.
(2) FR. BERNARDO DA COSTA, *Historia da Militar Ordem de N. S. Jesus Christo*, pag. 116.

4.º *Reis de Inglaterra.* — Tinham, no seculo XIV, a media de 14.000 a 16.000 contos de reis de rendimento annual.

5.º *Senhorios.* Variavam as rendas dos senhorios, abrangendo sob esta designação aquelles que tinham rendimento importante proveniente de fundos, terras ou outros dominios. Dos rendimentos d'um duque de Flandres, d'um duque inglez aos rendimentos de um simples senhor feudal ou *squire*, ia, como é natural, grande distancia.

6.º *As cidades.* Na Idade Media, só Veneza, Milão e Napoles tinham rendimentos que se approximassem dos do Papa ou dos reis. Em 1492, Veneza tinha 200 contos de reis; Milão e Napoles 120 contos de rendimento annual.

Londres, Paris, Barcelona, Sevilha, Lisboa, Bruges e Gand, tinham grandes rendimentos.

As descobertas maritimas do seculo XV provocaram a abertura de novos mercados e novos centros de producção.

As feiras de Lyon tornaram-se, no tempo de Francisco I, a grande Bolsa internacional de mercadorias e valores mobiliarios. Os grandes bancos de Augsburgo e Nuremberg, os Welser e os Fuggers dominavam o mercado dos metaes.

Por tal forma se abusava do credito que, no começo do seculo XVI, houve em Paris uma bancarrota de 4 milhões de francos.

Em 1620, começou a lançar-se nas letras de cambios a clausula *á ordem*, que lhes veio dar consideraveis facilidades de circulação e transmissão (1).

Coincide com esse prodigioso desenvolvimento do credito o desenvolvimento de novas industrias, taes como as industrias do livro e as do luxo, as industrias da Renascença.

A concentração do capital só se opera, porém, verdadeiramente nos dois seculos seguintes, especialmente na grande industria.

Essa concentração operou-se com tal rapidez, que chegou a alarmar muitos espiritos. Colbert fez esforços para multiplicar as manufacturas, a fim de obrigar os mestres a dar mais alguma coisa aos operarios, «de modo que os mestres de uma só ma-

---

(1) FAGNIEZ, *Economie sociale de la France, sous Henri IV.*

nufactura não se tornem senhores dos operarios, aos quaes não dariam senão o que lhes aprouvesse» ([1]).

Apesar, porém, de todas as precauções, a concentração foi por diante.

As pequenas industrias iam tendendo a desapparecer e no seculo XVIII vemos já o capital assumir o papel de dominador e soberano. As *grèves* de operarios tornam-se frequentes e até as coligações de industriaes se estabelecem, por vezes.

São os aspectos d'essa poderosa evolução que vamos examinar em Portugal, por isso que, mais ou menos intensamente, ella faz sentir até nós os seus effeitos.

IV

Origens do capitalismo em Portugal

Acompanhando as mais remotas manifestações da evolução do capitalismo moderno em Portugal, teremos de ir buscar as suas raizes ao seculo XIII, se bem que a éra capitalista principie, propriamente, como já dissemos, com o seculo XVI.

No seculo XIII começarão, portanto, as nossas investigações:

Seculo XIII

O seculo XIII abriu por uma forma devastadora na Europa. O luto e o pranto rompiam de todos os angulos do reino e a população da peninsula, rareada pelo flagello, só ao cabo de muitos annos se restaurou do enfraquecimento ([2]).

Foi por meio da crescente riqueza monetaria do povo, que nos meiados do seculo XIII começou a simplificar-se a machina complexa da fazenda publica e os chamados foraes de Affonso III

([1]) Cilleuls, *Histoire et régime de la grande industrie.*

([2]) *Chronicon conimbricense. Esp. Sagrad.*, tom. 23.º, pag. 333.

são, no seu maximo numero, o monumento e a expressão d'esse facto ([1]).

Antes d'isso, no seculo XI a moeda era rarissima e assaz rara ainda no seculo XII.

A passagem para a economia-dinheiro faz-se lenta, mas progressivamente: os vestigios do apparecimento da moeda tornam-se de cada vez mais distinctos, se bem continue a subsistir nos aforamentos e foraes primitivos o tributo fixado em generos. Ao mesmo tempo, accentuam-se o movimento commercial, o accrescimo da riqueza e o maior giro dos metaes amoedados.

E essa transformação, por mais que pareça restricta a um facto de caracter precisamente economico, é, realmente, um facto de alcance politico, por isso que a substituição das multiplicadas rações, direituras, forragens, colheitas, etc. por uma renda certa, em ouro ou prata, libertava os concelhos das prepotencias dos ricos-homens e dos prestameiros, minorando os abusos e vexames praticados pelos officiaes do fisco.

Mas no valor da moeda havia uma tal incerteza, que produziu graves transtornos e provocou sérios protestos. O rei disfructava o direito da *quebra*, que se marcava, ao que parece, de sete em sete annos; mas de tal forma o augmento do valor nominal da moeda antiga e a cunhagem de outra nova viciada levantaram reclamações, que, de commum accordo, os prelados, os barões, as ordens monasticas e militares e os concelhos pediram a convocação das côrtes de Coimbra, em 1261, nas quaes, após discussão agitada, se decretou que as moedas antigas fossem restituidas ao estado primitivo, que nunca mais n'ellas se fizesse alteração do valor nominal ou real e que as novas, que o rei começára a cunhar, e que eram de inferior toque, valessem em relação ás antigas, na razão de quatro para tres ([2]).

Essa concessão foi, porém, conquistada por uma forma extranha:—pela imposição de uma derrama unica, mas geral, sobre a propriedade, pagando-a apenas os possuidores de bens até mil

---

([1]) A. Herculano, *Historia de Portugal*, tomo 3.º, pag. 57.
([2]) Actas das côrtes de Coimbra de 11 de abril de 1261, no Livro I de Affonso III.

libras, ficando todas as fortunas, que excedessem mil *libras*, isentas de serem tributadas pelo excesso.

Obedecia, evidentemente, o plano ao proposito de lançar sobre o povo o encargo da remissão da moeda, como vieram proval-o mais claramente as isenções absolutas e directas aos bispos, com algúns dos seus familiares, aos chefes das ordens militares, aos religiosos, aos cavalleiros de espada á cinta e seus filhos, ás donas nobres, aos conegos e raçoeiros das cathedraes, notando-se ainda que para os burguezes ricos dos mais opulentos concelhos o gravame era leve.

Faz notar Alexandre Herculano, e com razão, que os debates das côrtes de Coimbra trouxeram como consequencia pôr cobro ás perturbações, que a cubiça ou as necessidades dos principes podiam, de annos a annos, produzir na situação interna e ainda externa do reino ([1]).

A esse tempo, a Igreja portugueza chegára ao cumulo de poder, como nos dá conta Coelho da Rocha ([2]); dispunha de varias riquezas, adquiridas, na sua maior parte, por doações, que os reis e os grandes senhores do paíz eram os primeiros a animar e cujos motivos se podem encontrar na piedade, no medo, no interesse, mas especialmente n'uma falsa comprehensão do espirito religioso, como se deprehende de factos revelados por Schaeffer, na sua «Historia de Portugal» ([3]).

Foi assim que o clero adquiriu vastos dominios; assim se tornou rico, de modo a constituir uma verdadeira força.

A tal ponto chegou a absorpção, que D. Diniz promulgou a lei de 10 de julho de 1286, restabelecendo o preceito de uma lei de 1211, dictada por Affonso II, mandando que os predios comprados pelas religiões e pelos membros do clero fossem vendidos, no praso de um anno. ([4])

Por outro lado, a diffusão das instituições vinculares, conhecidas pela denominação de *morgados*, especialmente no ultimo quartel do seculo XIII, muito contribuiu para immobilisar a terra,

---

([1]) A. Herculano, *Ob. cit.*, tomo 3.º, pag. 72.

([2]) C. da Rocha, *Ensaio sobre a historia do governo e da legislação de Portugal*, etc. pag. 56.

([3]) Schaeffer, *Historia de Portugal*, traducção portugueza, pag. 135.

([4]) Rebello da Silva, *Memoria sobre a população e a agricultura de Portugal*, pag. 135.

por isso que dava em resultado ser dotado um só filho, á custa de todos os outros. Bastas vezes, esse individuo era um inepto ou um ocioso, incapaz de dedicar uma parcella de intelligencia ou de actividade á cultura da terra.

D'est'arte, compromettia-se consideravelmente o desenvolvimento da riqueza publica e da particular.

Ao lado do clero e dos morgados, que englobavam terras e capitaes, estava uma entidade, que mais assiduamente manipulava o dinheiro. Eram os judeus.

Ao fundar-se a nacionalidade portugueza, os judeus espalhados pela peninsula iberica já gosavam de relativo bem-estar e a sua situação era o mais lisongeira possivel ([1]). Os primeiros monarchas usaram para com os judeus uma politica de provada tolerancia, chegando Affonso Henriques a ceder em propriedade a Yahia-aben-Yaïsch, um dos judeus mais nobres de Portugal, que se dizia descendente da casa real de David ([2]) algumas aldeias, permittindo-lhe usar brazão, tudo isto em recompensa do auxilio, que lhe prestára, para a libertação do sólo portuguez do dominio dos mouros.

As fortunas de alguns judeus estabelecidos em Portugal eram collossaes. Kaiserling refere-se a um dos homens, que mais influencia teve no tempo de D. Diniz, o arrabi-mór D. Judáh, que o monarcha chamou para gerir os negocios da fazenda; era tal a sua fortuna, que estava habilitado a emprestar a somma de 6000 *libras* para a compra da villa de Mourão ([3]).

Mas as ambições desmedidas dos judeus motivaram, mais tarde, medidas repressivas. N'um documento do reinado de Affonso III, de 1254 ou 1261, lê-se: «he estabeleçudo pola maliçia dos judeus que como alguem deles tirar emprestado nunca cresca mais do cabo como quer que muytos estes seiam feitos auendo começo do primeiro stromento» ([4]).

O incendio da judiaria inteira de Lisboa deu em resultado a sahida de muitos judeus importantes para Castella, onde, diz Kaiserling, pouco havia que os attrahisse ([5]).

([1]) J. Mendes dos Remedios, *Os judeus em Portugal*, pag. 116 e 119.
([2]) Kaiserling, *Geschichte der Juden in Portugal*, cap. X.
([3]) Kaiserling, *Ob. cit.* pag. 19.
([4]) *Portugaliae Monumenta Historica*, pag. 250.
([5]) Kaiserling, *Ob. cit.*, pag. 26.

Ao lado dos judeus estavam os Templarios, com planos exaggeradamente ambiciosos.

A Historia de Portugal, no seculo que estudamos, offerece bastas provas d'essa ambição e das represalias, que ella motivou. Com o desenvolvimento da vida municipal vamos assistindo a uma serie de factos, que, por muito diversos que pareçam, têem, todavia, entre si analogias palpitantes.

Na evolução do municipalismo apparecem-nos, mais de uma vez, os Templarios, com o seu poder absorvente.

Cita Herculano [1] que o concelho da Guarda déra aos Templarios, nos termos da villa, na aldeia ou logar de Touro, herdamento sufficiente para ser lavrado com seis jugos de bois. Foram n'o elles dilatando pelos terrenos adjacentes. «Os da Guarda parece terem tolerado estas usurpações; mas, quando viram que os templarios construiram ahi um castello, marcharam contra elles e derribaram-lh'o».

Para o estudo do capitalismo, sob o ponto de vista portuguez, tudo quanto se sabe sobre os Templarios está referido á ordem de Christo, cujo mestrado veio a encorporar-se na realeza e os seus bens tornaram-se bens da coroa [2].

Seculo XIV

Reproduzem-se e continuam-se no seculo XIV muitos dos factos, que acabamos de enumerar.

Os primeiros tempos da organisação do reino de Portugal não foram, pois, propicios á constituição da propriedade capitalista. As guerras assoladoras contra os sarracenos, as luctas contra os reis de Leão, as discordias civis, profundamente devastadoras — tudo isso era uma causa violenta de perturbações. Nas regiões do sul do reino, especialmente, a lucta, demorando-se, atrasou por seculos a população e a cultura.

---

(1) A. Herculano, *Historia de Portugal*, tomo 4.º, pag. 183.

(2) «... as jurisdicções, senhorios, castellos e commendas, e mais bens d'esta infelizmente gloriosa religião, passaram para a gloriosamente feliz Ordem de Christo.» — «*Supp. hist. ou Mem. e Not. da celebre Ordem dos Templarios*», Alex. Ferreira, 1735, anteloquio.

Com o decorrer dos tempos, a população foi crescendo, porém com pouca intensidade, sobretudo fóra dos concelhos. É certo que as municipalidades se fortaleceram; mas nem o trabalho nem a producção acompanharam esse progresso. O desenvolvimento dos factores da verdadeira riqueza economica era embargado pela viciosa organisação da propriedade, pela influencia esterilisadora de muitas instituições e tambem pela acção frequente e funesta das guerras, das epidemias, da fome e dos terremotos, não devendo esquecer-se a oppressão, sempre crescente, do clero e dos nobres.

Collocamos em primeiro lugar, e com sobeja razão, a viciosa organisação da propriedade porque, em verdade, foi ella que mais contribuiu para a decadencia da economia rural do paiz. A essa causa junta Rebello da Silva os encargos, que oneravam a propriedade, a desigualdade da condição civil das pessoas, a falta de segurança, então quasi geral, e os obstaculos suscitados pela organisação quasi anarchica do imposto, do commercio e do trabalho (1).

As maiores e melhores propriedades estavam em poder das corporações de mão morta, das ordens militares, dos ricos-homens e do rei, que as alienava frequentemente do dominio da coroa, para saciar a ambição das classes privilegiadas.

Os aforamentos collectivos de casaes encabeçados, typo seguido na provincia de Entre-Douro e Minho, com maior constancia do que nas de Traz-os-Montes, Beira, Estremadura e Alemtejo, favoreciam mais os progressos da cultura do que as bases adoptadas para a povoação das localidades de outras circumscripções (2).

Assumiam, no seculo XIV, as proporções de verdadeira extorsão as clausulas impostas pelo soberano aos colonos nos emprazamentos dos reguengos, pelas corporações religiosas nos seus vastos dominios e pelos senhores seculares nos aforamentos dos dilatados ermos devidos á munificencia dos principes.

Por outro lado, os rigores do fisco, a avidez dos senhorios e

---

(1) Rebello da Silva, *Memoria sobre a população e a agricultura de Portugal*, pag 120.

(2) Rebello da Silva, *Ob. cit.*

donatarios, comprometliam o desenvolvimento da riqueza nacional, consideravelmente ameaçada e ferida pelas guerras e discordias incessantes, que levavam a destruição e a ruina por toda a parte.

Ao mesmo tempo que D. Fernando se sentia prodigo de rendas publicas, do thesouro proprio e dos bens da coroa, liberalisando as mais largas doações aos fidalgos castelhanos do seu partido e aos portuguezes do seu valimento, as cearas eram calcadas aos pés de cavallos e os celleiros despejados pelas violencias da melicia (1).

Pelo que diz respeito á influencia dos judeus, limitar-no-hemos a observar que a protecção dispensada por D. Diniz levantou calorosos protestos, os quaes se fizeram especialmente sentir na concordia celebrada em Lisboa, em 1347 (2).

D. Affonso IV deu ouvidos a esses protestos, promulgando uma serie de medidas, especialmente respeitantes a impostos e usuras. Quer comprasse, quer vendesse, fosse para uso proprio ou para alheio, o judeu pagava sempre e a todos os respeitos. Quanto á usura, o rei prohibiu-a e estabeleceu que quem a exercesse perderia a usura e a somma emprestada (3).

D. Pedro I seguiu as tradições de seu pae; mas a oppressão contra os judeus não chegou tão longe como em Espanha, onde lhes era defezo poderem adquirir bens de raiz. Esta concessão atrahiu para os judeus portuguezes maior somma de capitaes, como prova o facto, referido por Brandão, na «Monarchia Lusitana», de um repatriado de Navarra ter vindo instituir um morgado de muitas quintas, nos arredores de Lisboa (4).

Não vem para aqui relatar por miudo as peripecias da famosa conspiração contra D. João, rei de Castella, em que entrava, como principal figura, o conde de Trastamara, servindo de intermediarios dois judeus e D. Leonor Telles. Com a entrada de D. Leonor no convento de Tordesillas, varios judeus partidarios da sua politica refugiaram-se em Castella, abandonando todos os bens que possuiam em Portugal, dos quaes o mestre de Aviz

---

(1) Rebello da Silva, *Ob. cit.*, pag. 138.
(2) *Monarchia Lusitana*, VII, pag. 86.
(3) *Ord. Affonsinas*, l. 2.º tit. LXXXXVI.
(4) *Monarchia Lusitana*, t. 6.º l. XVIII, pag. 14 e 15.

se aproveitou para espalhar profusamente beneficios e doações, entre vassallos que se tinham notabilisado no amor á causa da liberdade.

Assim, por exemplo, a Vasco Gonçalves Camello deu a renda dos direitos dos judeus do Porto, Gaya e Monchique [1], a D. Nuno Alvares Pereira os bens de D. David Negro, assim como o serviço real dos judeus de Lisboa [2], etc.

Ao findar o seculo XIV, contrastavam com as crueldades de que os judeus eram victimas em Espanha as concessões de toda a ordem, que em Portugal lhes eram outorgadas por D. João, cuja tolerancia se revelava nas leis, que promulgava, e nos privilegios, que concedia [3].

Passando a examinar a influencia dos Templarios, achamos, no começo do seculo XIV, o bispo da Guarda, como procurador do concelho de Idanha Velha, representando a D. Diniz contra o senhorio dos Templarios, não só na Idanha, cujo foral se oppunha a que o concelho sahisse do immediato dominio do rei, mas exigindo tambem que se lhes tirasse o de Proença e do Rosmaninhal, para estas villas ficarem consideradas como dependencias da Idanha [4].

A representação diz assim:

«Vosso tio D. Sancho, povoando a Idanha, deu-lhe termos, a que pôs marcos. Sem consentimento, antes contra vontade do concelho, o mestre Pedro Alvitiz passava Proença e o freire Estevam de Beaumont o Rosmaninhal, ficando ambas as povoações situadas dentro de marcos, que assignalam os termos. E agora a Ordem passou os dois logares, apesar da opposição do concelho de Idanha Velha, ao qual devem pertencer e ao qual os moradores d'esses logares devem servir e guardar respeito, como é costume dos aldeiões para com os respectivos cidadãos, em cujos termos vivem e cujo fôro hão»

De resto, a esse tempo, como se sabe, a Ordem dos Templarios era supprimida em todos os Estados da christandade, «como inutil ou perigosa» [5].

---

(1) *Monarchia Lusitana*, l. cit. pag. 595, col. 1.ª
(2) *Monarchia Lusitana*, ibid. pag. 523, col. 2.ª
(3) *Ordenações Offonsinas*, l. 2.º
(4) A. Herculano, *Historia de Portugal*, t. 4.º, pag. 184.
(5) J. Michelet, *Histoire de France*, IV, pag. 74.

Em Portugal foi extincta em 1311, a despeito do que affirma ácerca da pureza da Ordem fr. Bernardo da Costa na sua «Historia da Militar Ordem de Christo» [1].

Pela extincção, os Templarios foram privados dos bens da Ordem, que eram valiosissimos, como se deprehende das proprias palavras de fr. Bernardo da Costa quando escreve: «Prova-se de tantas e tão magnificas doações, que desde a primeira introducção, elles tiveram n'este reino até sua fatal extincção, assim feitas pelos reis, como pelos vassallos d'elles successivamente, pelo espaço de tantos annos». Estas affirmativas são confirmadas na Historia da Ordem Militar de Christo por um sem numero de documentos de doações.

Em que consistiam os bens sequestrados, dil-o Alexandre Ferreira quando especialisa «os thesoures, as rendas, as joias, as alfaias, as escrituras» [2].

A inveja dos reis não contribuiu pouco para a queda dos Templarios. Bastava para isso a magestade com que se tratavam os grão-mestres. «O trato era esplendidissimo; a meza franquissima; a dependencia muito grande; o cortejo extraordinario, porque não era só dos muitos cavalleiros, como subditos, mas dos que o queriam ser como dependentes e descrevem muitos authores que a magestade da sua côrte em nada cedia á da corôa de França» [3].

(Continúa).

---

[1] «Muitas e repetidas inquirições publicas e particulares se tiraram dos procedimentos dos Templarios n'este reino e nas Hespanhas, assim como se tiraram em França e mais provincias da christandade. Emquanto ás que se praticaram em Portugal, em Castella, Leão, etc., elles sahiram como o ouro das chammas do fogo.» — Fr. B. da Costa. *Historia da Militar Ordem de N. S. Jesus Christo*, pag. 116.

[2] A. Ferreira, *Memorias da Ordem dos Templarios*, pag. 70.

[3] A. Ferreira, *op. cit.*

BIBLIOGRAPHIA

*Correspondance d'*HERMITE *et de* STIELTJES *publiée par les soins de B.* BAILLAUD *et H.* BOURGET. Paris, Gauthier-Villars, 1905-1906.

A correspondencia entre dois grandes homens que se occupam dos mesmos assumptos, é quasi sempre extremamente instructiva. Permitte muitas vezes seguir a evolução das suas ideias no estudo das questões que consideram, appreciar as difficuldades que encontram, e conhecer outras circunstancias, mais ou menos interessantes, que na maior parte das vezes, a memoria ou nota onde publicam o resultado final das suas indagações, não revela.

Está n'este caso a interessantissima correspondencia entre HERMITE e STIELTJES. O primeiro um grande mestre, o segundo um grande discipulo, que, cultivando ambos com grande amor a theoria dos numeros e a theoria das funcções, vão communicando um ao outro os resultados que successivamente vão obtendo a respeito d'estas theorias, collaborando mesmo algumas vezes juntos para resolver as mesmas questões. Infelizmente, já ambos falleceram, o primeiro em idade avançada depois de uma vida cheia de gloria, inteiramente consagrada á sciencia, o outro novo ainda, quando tanto havia a esperar do seu bello talento.

São considerados nas cartas a que nos estamos referindo muitos e variados assumptos scientificos, e não nos é porisso possivel dar aqui indicação d'elles. Revelam todos os altos dotes de intelligencia e a delicadeza de sentimentos dos geometras eminentes que as escreveram, e, em especial, nas de HERMITE aquella affectuosidade tão conhecida de todos os que tiveram a felicidade de ter relações com este grande geometra.

Foram M. BAILLAUD e M. BOURGET, amigos e companheiros de STIELTJES na Universidade de Toulouse, que dirigiram esta publicação, com o que fizeram um serviço importante a todos os

que amam as sciencias mathematicas. As cartas nella contidas estão distribuidas por dois volumes, o primeiro dos quaes contém ainda uma interessante noticia biographica sobre Stieltjes, redigida por M. Bourget, e um bello prefacio, devido a M. Picard.

C. Hermite: *Oeuvres*, t. I. Paris, G. Villars, 1905.

O nome de Ch. Hermite occupa um dos primeiros logares na lista dos geometras mais eminentes que floresceram no seculo xix. Na Arithmetica superior, na Algebra e na Analyse, ramos das sciencias mathematicas a que consagrou a sua attenção, deixou numerosos e brilhantes vestigios do seu poderoso genio. A leitura dos seus trabalhos é das mais attrahentes, não só pelo valor dos resultados que encerram, como tambem pela fórma elegante e expressiva como são apresentados. Hermite, ao contrario de alguns outros inventores, prestava muita attenção ao modo de expôr os resultados das suas descobertas. Manifestando a sua opinião a este respeito, dizia-nos elle em uma carta que nos fez a honra de nos dirigir em 14 de dezembro de 1885: *après le travail de l'invention, il en a un autre dont nos maîtres en Analyse ont donné l'exemple et le modèle, de sorte que les oeuvres de Gauss et de Jacobi joignent à l'importance et à l'éclat des découvertes le mérite d'une forme parfaite.* Aos nomes tão justamente mencionados n'esta passagem póde reunir-se tambem o nome do grande mestre que as escreveu, e para o justificar basta ler os seus admiraveis *Cursos de Analyse* da Escola Polytechnica e da Faculdade de Sciencias de Paris.

A carreira de Hermite foi longa e inteiramente consagrada á sciencia. Porisso os seus trabalhos são numerosos e estão espalhados pela maior parte das collecções mathematicas do mundo, cujos directores procuravam, como grande honra para essas collecções, a collaboração do grande geometra francez. A Academia das Sciencias de Paris tomou sobre si o promover a reunião d'ellas em uma obra unica, prestando assim um alto serviço aos geometras de todos os paizes, e uma bella homenagem ao sabio que tanto honra deu a esta alta corporação scientifica.

O primeiro volume d'esta obra está publicado. Encontram-se n'elle os primeiros trabalhos que Hermite consagrou á theoria

das funcções ellipticas e abelianas, entre os quaes as cartas a **Jacobi** sobre estas ultimas funcções, que se tornaram célebres e que chamaram pela primeira vez para elle a attenção dos geometras. Contem tambem este volume muitos trabalhos consagrados á theoria dos numeros, á theoria algebrica das formas, etc., de que não nos é possivel dar aqui noticia detalhada. Como introducção, contém ainda uma noticia magistral sobre a obra de **Hermite**, objecto de uma lição feita por M. **Picard** na Sorbonne pouco tempo depois da sua morte.

G. **Darboux**: *Notice historique sur Charles Hermite*. Paris, G. Villars, 1905.

Do trabalho de M. **Picard** mencionado no fim da noticia precedente convem approximar aquelle cujo titulo vimos de escrever, o qual foi lido na sessão publica da Academia das Sciencias de Paris em 18 de dezembro de 1905. Em um e outro é feita de um modo profundo a analyse da obra scientifica de **Hermite**. Este ultimo contem ainda informações vivamente interessantes sobre a sua vida tão simples e tão sympathica. São dois trabalhos admiraveis, que devem ler todos os que quizerem estudar as obras de **Hermite**, para bem poder avaliar a importancia das descobertas que encerram.

E. **Borel**: *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes*. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

Este importante opusculo faz parte da collecção de monographias sobre a theoria das funcções que, debaixo da direcção de M. **Borel**, está publicando M. Gauthier-Villars, e contem as lições feitas na Escola Normal Superior de Paris por aquelle eminente geometra, durante o semestre de inverno de 1903 a 1904, as quaes foram redigidas por M. **Fréchet**.

Abre a obra por um capitulo consagrado á theoria das collecções de pontos; ao qual se seguem dois outros consagrados ao

estudo da noção de continuidade das funcções e ao estudo da noção de correspondencia quasi uniforme, introduzida pelo auctor. Depois nos capitulos 4.º e 5.º é estudada com profundeza e desenvolvimento a questão da representação das funcções de variaveis reaes por series de polynomios. O caso das variaveis imaginarias é tambem estudado em uma nota importante, que a este livro junctou M. Painlevé.

R. Baire: *Leçons sur les fonctions discontinues*. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

Este bello livro pertence á mesma collecção de monographias que o anterior, e contem as lições professadas por M. Baire no Collegio de França em 1904. O objecto d'estas lições foi, como diz M. Baire, procurar as funcções descontinuas representaveis por séries de funcções continuas. Para estudar este assumpto, á qual são consagrados os capitulos 1.º, 4.º e 5.º do livro mencionado, são tambem consideradas, nos capitulos 2.º e 3.º, algumas questões relativas á theoria das collecções de pontos e á theoria dos numeros transfinitos, que para isso é necessario conhecer.

Acrescentaremos que esta monographia, como a precedente e todas as outras da mesma collecção, das quaes se deu noticia no *Jornal de Sciencias mathematicas*, estão escriptas de modo que podem ser lidas pelos que conhecem sómente as noções de analyse actualmente classicas.

G. T.

SUR QUELQUES COMPLEXES DE DROITES

PAR

J. NEUBERG

Professeur à l'Université de Liège

---

1. Soient $UU' = u$, $VV' = v$ les perpendiculaires abaissées de deux points fixes U, V sur une droite variable de l'espace. On peut se proposer d'étudier les complexes des droites g qui satisfont à l'une des équations

$$\frac{u}{p} = \frac{v}{q}, \quad \frac{u^2}{p^2} + \frac{v^2}{q^2} = 1, \quad \frac{u^2}{p^2} - \frac{v^2}{q^2} = 1,$$

$$\frac{u}{p} \pm \frac{v}{q} = \pm 1, \quad uv = b^2, \quad u^2 = 2pv.$$

Tous ces complexes sont *de révolution autour de l'axe* UV, que nous désignerons par h; les trois premiers sont du second ordre, les trois derniers du quatrième ordre.

Le premier a été traité par M. CORIN (*Mathesis*, 1904, p. 177); mes recherches sur le deuxième vont paraitre dans les *Wiskundige Opgaven*. Je donnerai ici quelques développements sur les autres de ces complexes sans vouloir épuiser le sujet ni même les rattacher à la théorie générale.

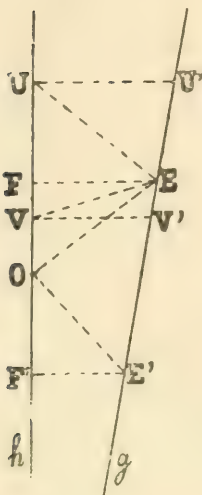
Le complexe $\frac{u^2}{p^2} - \frac{v^2}{q^2} = 1$

2. Soient (fig. 1) F, F′ les points qui divisent le segment UV, additivement et soustractivement, dans le rapport $p:q$; le milieu O de la distance FF′ partagera le segment UV soustractivement dans le rapport $p^2:q^2$. Les projections E, E′ des points F, F′ sur une droite g du complexe diviseront la distance U′V′ harmoniquement dans le rapport $p:q$.

Fig. 1

Cela posé, la relation entre u et v devient

$$\frac{\overline{UE}^2 - \overline{U'E}^2}{p^2} - \frac{\overline{VE}^2 - \overline{V'E}^2}{q^2} = 1,$$

ou simplement

$$\frac{\overline{UE}^2}{p^2} - \frac{\overline{VE}^2}{q^2} = 1. \tag{1}$$

Or, le théorème de Stewart donne

$$\frac{\overline{UE}^2}{UV.UO} + \frac{\overline{VE}^2}{VU.VO} + \frac{\overline{OE}^2}{OU.OV} = 1, \tag{2}$$

où il faut avoir égard à la règle des signes pour les facteurs des dénominateurs. De plus, si $UV = d$, on trouve facilement

$$UO = d\frac{p^2}{p^2 - q^2}, \quad VO = d\frac{q^2}{p^2 - q^2}. \tag{3}$$

Par suite, l'équation (2) se transforme en

$$\frac{\overline{\mathrm{UE}}^2}{p^2} - \frac{\overline{\mathrm{VE}}^2}{q^2} = \frac{d^2}{p^2 - q^2} - \frac{\overline{\mathrm{OE}}^2(p^2 - q^2)}{p^2q^2};$$

d'où, à cause de (1),

$$\overline{\mathrm{OE}}^2 = \frac{p^2q^2}{(p^2 - q^2)^2}(d^2 - p^2 + q^2). \tag{4}$$

Ce résultat s'applique également au point E′.

3. L'égalité (4) nous conduit à distinguer trois hypothèses principales :

$$p^2 > q^2, \quad p^2 < q^2, \quad p^2 = q^2;$$

nous désignerons les complexes correspondants par Γ_h, Γ_e, Γ_p.

Dans le premier cas, si $d^2 < p^2 - q^2$, le complexe ne comprend pas de rayon réel, et si $d^2 = p^2 - q^2$, les seuls rayons réels sont perpendiculaires en O sur l'axe. Nous supposerons donc $d^2 > p^2 - q^2$.

De la formule (4) on conclut que *le lieu des projections* E, E′ *des points fixes* F, F′ *sur les droites du complexe* Γ_h *est la sphère de centre* O *et de rayon*

$$a = \frac{pq}{p^2 - q^2}\sqrt{d^2 - p^2 + q^2}. \tag{5}$$

Nous appellerons A, A′ les points de rencontre de cette sphère avec l'axe h, et $2c$ la distance FF′. Comme

$$2c = \mathrm{UF}' - \mathrm{UF} = \frac{dp}{p-q} - \frac{dp}{p+q} = 2\frac{pq}{p^2 - q^2}d, \tag{6}$$

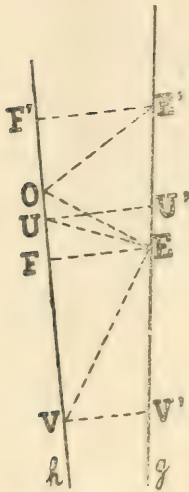
ou voit que $c > a$; donc les points **F**, **F′** sont extérieurs à la sphère **O**.

Fig. 2

Dans le complexe Γ_e (fig. 2), les points **E**, **E′** appartiennent encore à une sphère de centre **O** et de rayon

$$a = \frac{pq}{q^2 - p^2} \sqrt{d^2 + q^2 - p^2}. \tag{5'}$$

On a maintenant

$$2c = \mathrm{VF'} - \mathrm{VF} = \frac{dq}{q-p} - \frac{dq}{q+p} = 2\frac{pq}{q^2-p^2}d, \tag{6'}$$

de sorte que $c < a$; donc les points **F**, **F′** sont intérieurs à la sphère **O**.

Si $p = q$, appelons **F** le milieu de **UV** (fig. 3) et **E** la projection de **F** sur g. L'égalité $u^2 - v^2 = p^2$ se ramène à

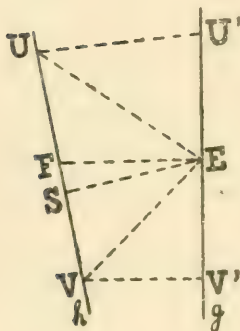



Fig. 3

$$\overline{\mathrm{UE}}^2 - \overline{\mathrm{VE}}^2 = p^2.$$

Soit **S** la projection de **E** sur h; un théorème connu donne

$$\overline{\mathrm{UE}}^2 - \overline{\mathrm{VE}}^2 = 2d.\mathrm{FS},$$

donc **FS** est constant. Ainsi, *le lieu des projections de* **F** *sur les rayons du complexe* Γ_p *est un plan* σ *perpendiculaire à* h *en* S.

En resumé, *les complexes* Γ_h *et* Γ_e *sont constitués par les perpendiculaires elevées en un point quelconque* **E** *d'une sphère fixe* **O** *sur la droite joignant ce point à un point fixe* **F** (ou à son symétrique **F′** par rapport au centre de la sphère). *Le complexe* Γ_p *comprend les perpendiculaires élevées en un point quelconque* **E** *d'un plan fixe* σ *sur la droite joignant* **E** *à un point fixe* **F**.

Cet énoncé rappelle une génération tangentielle des coniques. On pourrait dire que Γ_h et Γ_e sont les *complexes antipodaires* de

F ou F′ par rapport à la sphère O, et que Γ_p est le complexe antipodaire de F par rapport au plan σ.

Le complexe antipodaire d'une sphère par rapport à l'un de ses points est le complexe étudié par M. Corin (*Mathesis;* 1904, p. 177).

Les complexes Γ_e, Γ_h sont déterminés, quand on se donne la sphère (O, a) et les points F, F′ symétriques par rapport à O; pour U et V on peut prendre deux points quelconques qui divisent la distance FF′ harmoniquement, car les relations (5) et (6) ou (5′) et (6′) déterminent p et q si l'on connaît a et c avec d ou avec le rapport $p : q$.

De même, étant donnés le plan σ et le point F, le complexe Γ_p est déterminé; pour U et V on peut adopter deux points quelconques de la droite FS symétriques par rapport à F.

4. Etudions spécialement le complexe Γ_e (fig. 4).

Soit γ la circonférence suivant laquelle un plan λ mené par

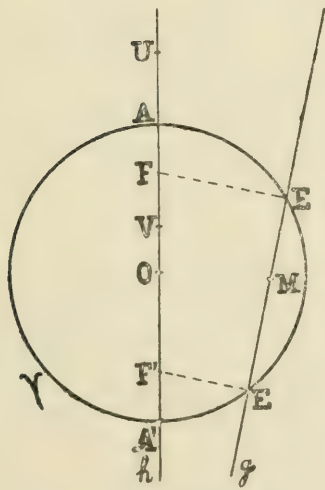
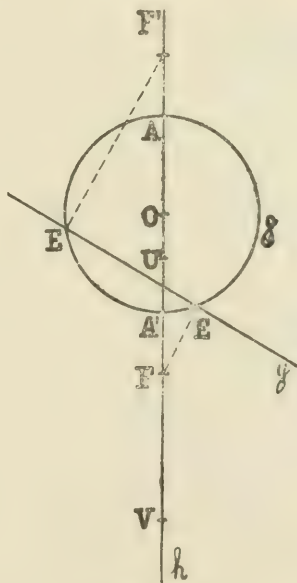



Fig. 4 Fig. 5

l'axe h coupe la sphère O. On obtient les droites du complexe contenues dans le plan λ en menant en un point quelconque E de γ une perpendiculaire à FE; donc ces droites enveloppent une ellipse ε qui a pour foyers F, F′ et pour grand axe AA′. Autrement dit, *les courbes méridiennes du complexe sont des ellipses de*

foyers F, F′ *et de sommets* A, A′; elles appartiennent à un ellipsoide de révolution que nous désignerons par η.

Les rayons du complexe qui passent par un même point E de la sphère O forment deux faisceaux situés l'un dans un plan perpendiculaire à FE, l'autre dans un plan perperdiculaire à F′E. C'est pourquoi les points de la sphère sont dits *singuliers*. Les plans de ces faisceaux ont pour enveloppe l'ellipsoïde η.

Le plan tangent à l'ellipsoïde η en un point M de EE′ comprend deux faisceaux de rayons appartenant au complexe et ayant pour centres les points E, E′; pour cette raison ce plan est appelé un *plan singulier* du complexe.

Les deux faisceaux de rayons du complexe qui ont pour centre le point F, ont un rayon commun, perpendiculaire au plan AEA′; les rayons de cette espèce sont tangents à la sphère O. La droite EE′ est un rayon commun à deux faisceaux du complexe contenu dans un même plan; les rayons de cette espèce sont tangents aux méridiennes de η.

Les rayons du complexe qui passent par un même point donné P s'appuient sur la circonférence suivant laquelle la sphère O est coupée par la sphère de diamètre FP (ou de diamètre F′P); on en conclut qu'ils engendrent un cône du second ordre. Cependant, lorsque P est sur l'ellipsoïde (par exemple en M), les sphères de diamètre FP ou F′P touchent η (en E ou E′) et l'on trouve un rayon unique du complexe passant par P; lorsque P est intérieur à η, il n'y a pas le rayon réel passant par P. En A ou A′ le cône du complexe est formé par un seul faisceau de rayons perpendiculaires à l'axe h.

Les rayons du complexe qui sont parallèles à une droite donnée m, s'appuient sur la circonférence suivant laquelle la sphère O est coupée par le plan mené en F perpendiculairement à m; ils appartiennent donc à un cylindre de révolution.

Les cônes du complexe qui ont pour centre F ou F′, sont des *cônes isotropes*.

Soit g une droite du complexe située dans un plan donné μ qui coupe la sphère O suivant une circonférence δ. Projetons les points F, F′ en F_1, F'_1 sur le plan μ et en E, E′ sur la droite g; les points E, E′ appartiennent à δ et les droites F_1 E, F'_1 E′ sont encore perpendiculaires à g. Il résulte de là que la courbe du complexe contenue dans le plan μ est une ellipse de foyers F_1, F'_1. Lorsque μ touche la sphère O en un point E, il ne con

tient qu'un seul rayon réel qui est perpendiculaire au plan EFF'; lorsque μ ne rencontre pas la sphère, il ne contient plus de rayon réel.

Les courbes méridiennes du complexe Γ_h sont des hyperboles ayant pour foyers F, F' et pour sommets A, A' (fig. 5). Le lecteur adaptera facilement à ce complexe les résultats obtenus ci-dessus pour Γ_e. Nous nous contentons de faire remarquer que les asymptotes des hyperboles méridiennes font partie du complexe et que chacune d'elles est le seul rayon ayant la même direction.

5. Passons au complexe Γ_p.

On voit facilement que les courbes méridiennes sont des paraboles de foyer F et de sommet S.

Toute droite du plan σ appartient au complexe; c'est pourquoi on appelle σ un *plan principal.*

Les droites du complexe qui passent par un point E de σ forment deux faisceaux qui sont situées l'un dans le plan σ, l'autre dans le plan perpendiculaire à FE en E. Les points de σ sont donc des points singuliers du complexe.

Les rayons du complexe qui passent par un même point P, s'appuient sur la circonférence suivant laquelle le plan σ coupe la sphère de diamètre FP; ils forment donc un cône du second ordre. Si P appartient à une parabole méridienne, le cône se réduit à la tangente à cette parabole en P; si P est intérieur au paraboloïde lieu de la parabole méridienne, le cône est imaginaire.

Les rayons des complexe qui sont parallèles à une droite donnée m, s'appuient sur la droite suivant laquelle le plan σ recontre le plan mené par F et perpendiculaire à m; ces rayons sont donc situés dans un même plan. Quant aux rayons parallèles ou perpendiculaires à FG, les premiers sont rejetés à l'infini et les seconds sont les droites de σ.

Le complexe $\frac{u}{p} \pm \frac{v}{q} = \pm 1$

6. Comme u et v sont des fonctions irrationnelles des coordonnées de g, il faut ranger dans un même complexe les droites

qui vérifient l'une des égalités

$$\frac{u}{p}+\frac{v}{q}=1\,,\quad \frac{u}{p}-\frac{v}{q}=1\,,\quad \frac{v}{q}-\frac{u}{p}=1\,.$$

Considérons d'abord les droites g situées dans un même plan méridien λ (fig. 6). Soient F, F' les points qui divisent le segment UV additivement et soustractivement dans le rapport $p:q$; appelons f, f' leurs distances à g et soumettons u, v, f, f' à la règle des signes. Alors

Fig. 6

$$f=\frac{pv+qu}{p+q}\,,\quad f'=\frac{pv-qu}{p-q}\,;$$

l'un des numérateurs, en vertu de la définition du complexe, est égal à $+1$ ou -1. Donc si $p<q$ et que l'on fasse

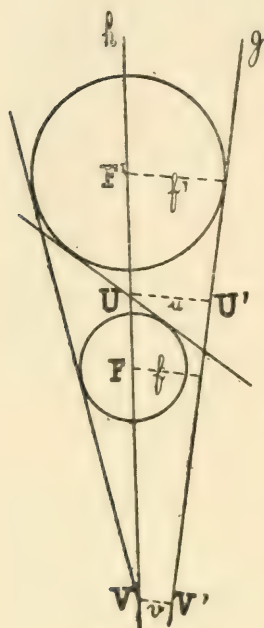
$$r=\frac{pq}{p+q}\,,\quad r'=\frac{pq}{q-p}\,,$$

on voit que *les droites* g *du plan* λ *sont tangentes à l'une des circonférences* $(\mathbf{F}, r)$, $(\mathbf{F}', r')$.

Les tangentes communes à ces deux circonférences passent par V ou par U et correspondent à $v=0$, $u=p$ ou à $u=0$, $v=p$.

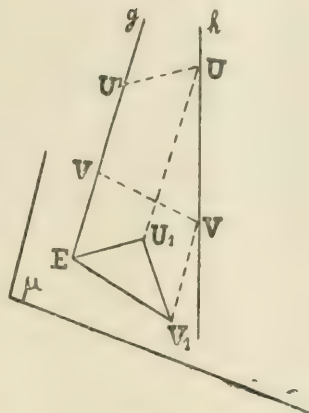
Les points de l'axe h sont des *points singuliers* du complexe; car les droites g menées par un point P de h sont les génératrices des deux cônes circonscrits aux sphères $(\mathbf{F}, r)$, $(\mathbf{F}', r')$ et ayant pour sommet le point P. Ces cônes coïncident lorsque P est en U ou en V; l'un d'eux se transforme en un faisceau de rayons perpendiculaires à h lorsque P est à l'intersection de h avec l'une des sphères.

Les plans méridiens sont des *plans singuliers* du complexe, parce que la courbe correspondante se décompose en deux circonférences.

7. Considérons maintenant les droites g perpendiculaires à un plan quelconque μ (fig. 7). Soient U_1, V_1 les projections de

U, V sur le plan, E le point de recontre d'une droite g avec μ. Comme $EU_1 = U'U$, $EV_1 = V'V$, on a

$$\frac{EU_1}{p} \pm \frac{EV_1}{q} = \pm 1 .$$

Fig. 7

Par conséquent, *les rayons du complexe parallèles à une même droite appartiennent à un cylindre ayant pour section droite un ovale de Descartes.*

8. Si la droite g est située dans le plan μ, les droites $U_1 U'$, $V_1 V'$ sont perpendiculaires à g; par suite, en posant

$$UU_1 = m, \quad VV_1 = n, \quad U_1U' = u', \quad V_1V' = v',$$

on a

$$\frac{\sqrt{m^2 + u'^2}}{p} \pm \frac{\sqrt{n^2 + v'^2}}{q} = 1 ,$$

ce qui conduit à une équation du quatrième degré en u' et v'.

9. Pour les droites g qui passent par un point donné P on peut écrire

$$\frac{UP \sin (UP, g)}{p} \pm \frac{VP \sin (VP, g)}{q} = \pm 1.$$

La droite variable g forme alors avec les droites UP, VP un trièdre satisfaisant à une relation de la forme

$$p' \sin (UP, g) \pm q' \sin (VP, g) = \pm 1 ;$$

cette égalité se traduit par une équation du quatrième ordre entre les cosinus directeurs de g.

10. L'hypothèse $p = q$ introduit quelques changements intéressants.

Puisque $u \pm v = \pm p$, les droites g situées dans un plan méri-

dien λ touchent la circonférence décrite du milieu de UV comme centre avec le rayon $\frac{1}{2}p$ ou bien elles sont parallèlles à l'une ou l'autre des tangentes menées de U à cette circonférence.

Les droites du complexe perpendiculaires à un plan quelconque μ rencontrent ce plan aux poins d'une ellipse, d'une hyperbole ou de la droite joignant les projections U_1, V_1 de U, V sur μ, suivant que le rapport $U_1 V_1 : p$ est inférieur, supérieur ou égal à l'unité.

Le complexe $uv = b^2$

11. Considérons les droites du complexe situées dans un même plan méridien λ.

Celles de ces droites qui ne passent pas entre les points U et V, enveloppent une ellipse ε qui a pour foyers U, V et pour petit axe $2b$. Celles qui passent entre U et V, enveloppent une hyperbole η qui a les mêmes foyers U, V et pour axe imaginaire $2b$. Pour que ces dernières droites existent, on doit avoir $2b > UV$; si $2b = UV$, la perpendiculaire au milieu de UV est la seule droite g qui coupe le segment UV.

Les plans méridiens sont des plans singuliers du complexe.

Le points de l'axe h sont des points singuliers du complexe: les cônes du complexe qui ont pour sommet un point de h sont constitués par deux cônes de révolution circonscrits à l'ellipsoïde ou à l'hyperboloïde engendrés par ε ou η tournant autour de h.

Les cônes isotropes de sommet U ou V appartiennent au complexe.

12. Soient U_1, V_1 les projections des points U, V sur un plan quelconque μ, et g une droite du complexe perpendiculaire à μ au point E. On a évidemment

$$U_1 E . V_1 E = b^2;$$

il résulte de là que les cylindres du complexe ont pour section droite une ellipse de Cassini, qui devient une lemniscate de Bernoulli lorsque $2b = U_1 V_1$.

13. Pour les droites g situées dans le plan μ, on a, avec les notations du § 8,

$$(m^2 + u'^2)(n^2 + v'^2) = b^4, \qquad (7)$$

équation du quatrième ordre dont il serait intéressant de poursuivre l'étude. Je me bornerai ici à donner la construction du point de contact de g avec son enveloppe en m'appuyant sur le lemme suivant (Voir *Nouvelle Correspondence mathématique*, 1880, p. 597):

Si une droite g *se meut dans un plan de manière que ses distances* $AA' = \alpha$, $BB' = \beta$ *à deux points fixes* A, B *vérifient la relation* $f(\alpha, \beta) = 0$, *le point de contact* M *de* g *avec son son enveloppe satisfait à l'égalité*

$$\frac{MA'}{MB'} = \frac{d\alpha}{d\beta} = -\frac{f'\alpha}{f'\beta}, \qquad (8)$$

où il faut avoir égard à la règle des signes.

En effet, soit g' une position de la droite mobile infiniment voisine de g; si AA', BB' rencontrent g' en A'_1, B'_1, les segments $A'A'_1$, $B'B'_1$ représentent les accroissements de α et β pourvu qu'on néglige des infiniment petits d'ordre supérieur. N' étant le point de rencontre de $A'B'$ avec $A'_1B'_1$, on a en grandeur et en signe

$$\frac{NA'}{NB'} = \frac{A'A'_1}{B'B'_1},$$

d'où, en passant à la limite, la relation (8).

Cela posé, on tire de (7)

$$\frac{u'du'}{m^2 + u'^2} + \frac{v'dv'}{n^2 + v'^2} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{u'du'}{u^2} + \frac{v'dv'}{v^2} = 0.$$

Or, si les perpendiculaires élevées en U sur UV' dans le plan UV_1V' et en V sur VV' dans le plan VV_1V' vont rencontrer respectivement U_1U' en U_2 et V_1V' en V_2, on a: $u^2 = u' . U'U_2$, $v^2 = v' . V'V_2$, de sorte que

$$\frac{du'}{dv'} = -\frac{U'U_2}{V'V_2}.$$

Par conséquent, le point de contact de $U'V'$ avec son enveloppe et la droite U_2V_2 partagent le segment $U'V'$ harmoniquement.

14. Pour les droites g passant par un même point P, on a

$$\sin(PU, g)\sin(PV, g) = \frac{b^2}{PU \cdot PV},$$

ce qui conduit à une équation du quatrième degré entre les cosinus directeurs de g.

Comme on doit avoir $PU \cdot PV >$ ou $= b^2$, il faut que le point P soit exterieur au solide de révolution qui a pour courbe méridienne la cassinienne $UP \cdot UV = b^2$.

Le complexe $u^2 = 2pv$

15. Nous étudions d'abord l'enveloppe des droites g situées dans un même plan méridien λ.

On trouve facilement l'équation de la podaire de U ou V par rapport à cette enveloppe. Car si $UV = d$, *angle* $U'UV = \omega$, on a $u - v = d\cos\omega$. Par conséquent l'équation de la courbe (U') est

$$u^2 = 2p(u - d\cos\omega), \quad \text{ou} \quad u^2 - 2pu + 2pd\cos\omega = 0,$$

et celle de V':

$$(v + d\cos\omega)^2 = 2pv, \quad \text{ou} \quad v^2 - 2v(p - d\cos\omega) + d^2\cos\omega^2 = 0,$$

suivant que l'origine est en U ou en V. En coordonnées rectangulaires on a, respectivement,

$$(x^2 + y^2)^3 = 4p^2(x^2 + y^2 - dx)^2,$$
$$(x^2 + y^2 + dx)^4 = 4p^2(x^2 + y^2)^3.$$

Soit M le point de contact de $U'V'$ avec son enveloppe; on a

$$\frac{MU'}{MV'} = \frac{du}{dv} = \frac{p}{u} = \frac{\frac{1}{2}u}{v}. \tag{9}$$

On en conclut que M est à l'intersection de $U'V'$ avec la droite joignant V au milieu de UU' ou joignant U au symétrique de V' par rapport à V.

La droite UV correspond à $u=0$, $v=0$; elle touche la courbe méridienne en V, car l'égalité (9) donne maintenant

$$\frac{\mathrm{MU}}{\mathrm{MV}}=\frac{p}{o}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{MV}=0.$$

UV étant un axe de symétrie de la méridienne, cette droite est à considérer comme une tangente double.

Une solution de $u^2=2pv$ étant $u=v=2p$, les tangentes communes aux cercles $(\mathrm{U}, 2p)$, $(\mathrm{V}, 2p)$ font partie du complexe; les tangentes communes extérieures sont parallèles à UV, les deux autres (qui peuvent être imaginaires) passent au milieu O de UV. Les asymptotes de la méridienne correspondent à $u=2v=p$, c'est ce qui résulte de la relation (9).

16. Considérons ensuite les droites g perpendiculaires à un plan méridien λ (fig. 8).

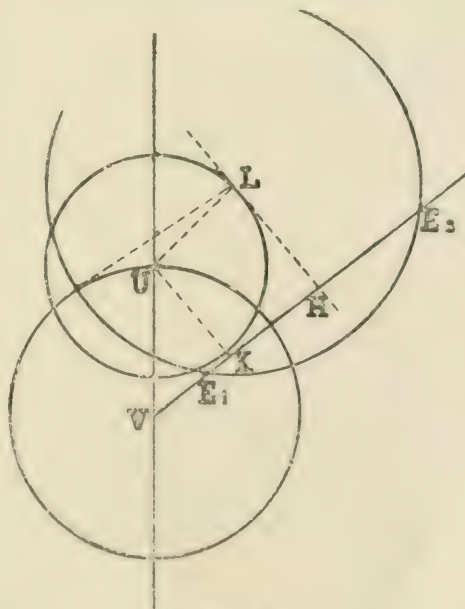
Si E_1 est le point de rencontre d'un rayon g du complexe avec ce plan, on a

$$\overline{\mathrm{UE}}_1^2=2p\,.\,\mathrm{VE}_1, \qquad (10)$$

équation du quatrième ordre en coordonnées rectangulaires. Posons $\mathrm{VE}_1=\rho$, *angle* $\mathrm{E_1VU}=\omega$; l'équation (10) prendra la forme

$$\rho^2-2\rho(d\cos\omega+p)+d^2=0.$$

Fig. 8

Représentons par ρ_1 et ρ_2 les deux racines de cette équation; soient E_1 et E_2 les deux points correspondants, H le milieu du

segment E_1E_2 ; nous aurons

$$\rho_1\rho_2 = d^2, \quad \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) = d\cos\omega + p,$$

ou

$$VE_1 . VE_2 = d^2, \quad VH = d\cos\omega + p.$$

La première égalité montre que la courbe (E), base d'un cylindre du complexe perpendiculaire à λ, est une anallagmatique par rapport au cercle (V, d). Si l'on projette U en K sur VE_1, on a $VK_1 = d\cos\omega$, et le point K est sur la circonférence de diamètre UV. Comme $KH = p$, le lieu de H est un *limaçon de Pascal*. La perpendiculaire en H sur VH est tangente à la circonférence (U, p) en un point L ; la circonférence décrite du centre L et orthogonale à la circonférence (V, d) passe par les points E_1, E_2.

Il résulte de là que *la courbe* (E) *est l'enveloppe d'une circonférence qui coupe orthogonalement la circonférence* (V, d) *et dont le centre parcourt la circonférence* (U, p).

Les droites du complexe perpendiculaires à un plan quelconque μ admettent des conclusions analogues, sauf à remplacer U et V par leurs projections U_1, V_1 sur μ.

17. Pour les droites g situées dans un même plan μ, on a, avec les notations du § 8,

$$(m^2 + u'^2)^2 = 4p^2(n^2 + v'^2).$$

Elles ont pour enveloppe une courbe de la 4[e] classe.

Enfin, les droites g qui passent par un point donné P vérifient une relation de la forme

$$\sin^2(UP, g) = p' \sin(VP, g).$$

GLI AGGRUPPAMENTI PROSPETTIVI DI ORDINE n E SPECIE $p+1$

DI

G. Lazzeri

(Prof. nella R. Accademia Navale di Livorno)

Gli aggruppamenti prospettivi, di cui studio le proprietà fondamentali in questa nota, sono un caso particolare notevole degli aggruppamenti proiettivi, studiati ampiamente dal De Paolis nella sua bella memoria premiata dalla R. Accademia dei Lincei.

Chi già conosce la citata memoria del De Paolis, dal § 11 della presente nota può dedurre immediatamente una conseguenza importante, che cioè tutti gli aggruppamenti proiettivi del 3° e 4° ordine sono o possono ridursi prospettivi, ma lo stesso non accade per quelli di ordine superiore al 4°.

1. Definizione. — Essendo $f_1, f_2 \ldots f_n$, (B) n rette ed uno spazio $[p]$ di uno spazio $[n+p]$, tali che due qualunque di essi non abbiano un punto comune, si chiama aggruppamento prospettivo di ordine n e specie $p+1$ l'insieme dei gruppi G_n di n punti che si ottengono come intersezioni delle n rette $f_1, f_2 \ldots f_n$ con gli $[n+p-1]$ che contengono (B). Questo spazio (B) si dice *base* dell'aggruppamento [1].

Indicheremo un tale aggruppamento col simbolo $(A_{p+1})_n$ od anche $(A_B)_n$.

---

[1] Veggasi Lazzeri, *Gli aggruppamenti prospettivi e proiettivi del 2°, 3° e 4° ordine.* — *Periodico di matematica,* tomo XVI, pag. 225.

Dalla definizione stabilita risulta:

1) Un gruppo $G_{n-1}(P_1, P_2, \ldots P_{i-1}, P_{i+1} \ldots P_n)$ di $n-1$ punti scelti ad arbitrio sulle rette $f_1, f_2, \ldots f_{i-1}, f_{i+1} \ldots f_n$ individua (in generale) uno ed un solo punto P_i di f_i, che forma con essi un gruppo G_n dell'aggruppamento $(A_{p+1})_n$. Il punto P_i si dice polo del gruppo G_{n-1} rispetto all' $(A_{p+1})_n$.

Infatti gli $(n-1)$ punti $P_1, P_2 \ldots P_{i-1}, P_{i+1} \ldots P_n$ e la base (B) individuano un $[n+p-1]$ che taglia f_i in un punto P_i.

2) Un gruppo G_k $(P_{i_1} P_{i_2} \ldots P_{i_k})$ di k punti scelti ad arbitrio sulle k rette $f_{i_1}, f_{i_2} \ldots f_{i_k}$ individua sulle rimanenti rette un aggruppamento $(A_{p+k+1})_{n-k}$ di ordine $n-k$ e specie $p+k+1$, tutti i gruppi G_{n-k} del quale formano con i medesimi un gruppo G_n dell' $(A_{p+1})_n$.

In particolare per $k=n-2$ si ha:

3) Le coppie di punti P_i, P_h su due rette f_i, f_h, che con $n-2$ punti dati ad arbitrio sulle rimanenti rette, costituiscono un aggruppamento $(A_{n+p-1})_2$, ossia sono le coppie di punti corrispondenti in una proiettività ordinaria.

4) I gruppi di un $(A_{p+1})_n$ sono ∞^{n-1}.

Infatti ogni gruppo è individuale da $n-1$ punti scelti ad arbitrio su altrettante rette.

5) Gli aggruppamenti prospettivi di specie p sopra n rette date ad arbitrio in un $[n+p]$ sono ∞^ν, essendo $\nu \leqq n(p+1)-1$.

Infatti un $(A_{p+1})_n$ è interamente determinato, quando oltre alle n rette è data la base (B). Siccome un $[a]$ in un $[m]$ è individuata da $(a+1)(m-a)$ condizioni, casi il $[p]$ base è individuato da $[p+1]n$ condizioni.

2. Se $p=o$, cioè se la base (B) si riduce ad un punto, l'aggruppamento è di 1ª specie $(A_1)_n$.

Se manca la base (B) l'aggruppamento diventa di specie o. Esso è allora formato dai gruppi di punti in cui n rette $f_1, f_2 \ldots f_n$ appartenenti ad un $[n-1]$ sono tagliati dagli $[n-2]$ di questo. Su n rette appartenenti ad un $[n-1]$ esiste un solo $(A_0)_n$.

3. Definizione. — Un gruppo $G_k(P_{i_1}, P_{i_2} \ldots P_{i_k})$ di k punti presi su altrettante rette $f_{i_1}, f_{i_2} \ldots f_{i_k}$ si dice *apolare*, se forma un gruppo G_n dell' $(A_{p+1})_n$ con qualunque gruppo

$G_{n-k}(P_{i_{k+1}}\ P_{i_{k+2}} \dots P_{i_n})$ di $n-k$ punti presi sulle rimanenti rette; cioè se appartiene agli aggruppamenti polari di tutti i possibili gruppi G_{n-k} presi sulle rimanenti rette.

4. Teorema. — Esistono gruppi G_k apolari rispetto ad un $(A_{p+1})_n$, purchè sia $k > \frac{n}{2}$.

Si possono ottenere gruppi apolari soltanto nei due seguenti casi:

1) Per la base (B) e per s rette $f_{i_1}\ f_{i_2} \dots f_{i_s}$ passa un $[p+2s]$ che è contenuto nell' $[n+p]$ dato, se $2s < n$.

Poniamo $n-1-2s = f$. Allora il $[p+2s]$ è un $[p+n-1]$, se $f=o$, o è base di un sistema di $\infty^f [p+n-1]$, se $f>o$. Ciascuno di questi $[p+n-1]$ taglia le rette $f_{i_{s+1}}, f_{i_{s+2}} \dots f_{i_n}$ in un gruppo di punti $G_{n-s}(P_{i_{s+1}}\ P_{i_{s+2}} \dots P_{i_n})$ che è apolare, perchè forma un gruppo G_n dell' $(A_{p+1})_n$ con qualsiasi gruppo G_s delle $f_{i_1}\ f_{i_2} \dots f_{i_s}$.

Affinchè un tale gruppo G_{n-s} si possa trovare è dunque necessario e sufficiente che sia $f \geqq o$, ossia

$$s \leqq \frac{n-1}{2},$$

e quindi $k = n - s \geqq \frac{n+1}{2}$,

od anche

$$k > \frac{n}{2}.$$

2) Se un $[n+p-s-1]$ contiene la base (B), e incontra $(n-s)$ rette $f_{i_{s+1}}\ f_{i_{s+2}} \dots f_{i_n}$ in altrettanti punti $P_{i_{s+1}}, P_{i_{s+2}} \dots P_{i_n}$, questi costituiscono un gruppo G_{n-s} apolare. Infatti per questo $[n+p-s-1]$ e per s punti arbitrari $P_{i_1}.\ P_{i_2} \dots P_{i_s}$ delle $f_{i_1}, f_{i_2} \dots f_{i_s}$ passa un $[n+p-1]$, che contiene anche $P_{i_{s+1}} \dots P_{i_n}$; dunque il gruppo G_{n-s} forma un gruppo G_n con ogni gruppo G_s delle rimanenti rette, ossia G_{n-s} è apolare rispetto ad $(A_{p+1})_n$.

Esaminiamo se ed in quali casi si possono determinare $[n+p-1]$ che verificano le condizioni imposte precedentemente.

É noto [1] che il numero di condizioni da verificarsi perchè un $[a]$ ed un $[b]$ appartenenti ad un $[m]$ abbiano un $[c]$ comune solamente è

$$(1) \qquad z=(c+1)(m+c-a-b).$$

Ponendo $m=n+p$, $a=n+p-s-1$, $b=1$, $c=o$, si ricava che il numero di condizioni perchè un $[n+p-s-1]$ ed una retta dell' $[n+p]$ abbiano un punto comune, è

$$z=(n+p)-(n+p-s-1)-1=s,$$

e quindi il numero di condizioni perchè un $[n+p-s-1]$ incontri $(n-s)$ rette in altrettanti punti è

$$s(n-s).$$

É pure noto che il numero di condizioni necessarie perchè l' $[n+p-s-1]$ dell' $[n+p]$ contenga un punto è $(s+1)$, e quello delle condizioni perchè l' $[n+p-s-1]$ contenga la base (B) (ossia $p+1$ dei suoi punti) è

$$(p+1)(s+1).$$

Riassumendo, l' $[n+p-s-1]$ deve verificare in tutto

$$f=s(n-s)+(p+1)(s+1)$$

condizioni.

Ora il numero di condizioni che serve a determinare un $[a]$ in $[m]$ (come si vede ponendo nella (1) $a=b=c$) è

$$u=(a+1)(m-a)$$

---

(1) Veggasi per es. SCHUBERT. *Fundamentale Anzahlen bei* n *Dimensionen*. — *Mathematische Annalen*, Bd. XXVI, s. 29.

e quindi per l' $[n+p-s-1]$ nell' $[n+p]$

$$u=(n+p-s)(s+1).$$

Si potrà dunque determinare un $[n+p-s-1]$ che verifichi le condizioni poste, se

$$u \geqq f.$$

Siccome

$$\begin{aligned} u-f &= (n+p-s)(s+1)-s(n-s)-(p+1)(s+1) \\ &= (s+1)(n-s-1)-s(n-s) \\ &= (n-s)-(s+1) = n-2s-1, \end{aligned}$$

si ricava

$$s \leq \frac{n-1}{2},$$

e quindi

$$k=n-s>\frac{n}{2}.$$

Corollari. — 1°) Se n è dispari, sopra $\frac{n+1}{2}$ rette $f_{i_1} f_{i_2} \cdots f_{i_{\frac{n+1}{2}}}$ esistono due soli gruppi apolari.

2°) Se n è pari, sopra $\frac{n}{2}+1$ rette $f_{i_1} f_{i_2} \cdots f_{i_{\frac{n}{2}+1}}$ esistono due sistemi ∞^1 di gruppi apolari.

3°) Ogni gruppo G_s, che contiene un gruppo G_k apolare, è pure apolare.

5. Esaminiano più particolarmente la posizione dei gruppi apolari, studiati nel § precedente distinguendo il caso di n dispari da quella di n pari.

1) *n dispari*

Chiamiamo $\pi_{i_1 i_2 \cdots i_{\frac{n-1}{2}}}$ il $[p+n-1]$ che contiene (B) e $f_{i_1} f_{i_2} \cdots f_{i_{\frac{n-1}{2}}}$; $\sigma_{i_1 i_2 \cdots i_{\frac{n+1}{2}}}$ lo spazio $\left[p+\frac{n-1}{2}\right]$ comune agli

..

$\frac{n+1}{2}$, π, i cui indici si ottengono sopprimendo via via uno di quelli di σ; $\lambda_{i_1}\left(i_2 \ldots i_{\frac{n+1}{2}}\right)$ la spazio $\left[p+\frac{n+1}{2}\right]$ comune a tutti gli spazi π i cui indici si ottengono dal gruppo $i_1\, i_2 \ldots i_{\frac{n+1}{2}}$ sopprimendo successivamente $i_2, i_3, \ldots i_{\frac{n+1}{2}}$.

La f_{i_1} ([1]) essendo contenuta in tutti i π che passano per $\lambda_{i_1}\left(i_2 \ldots i_{\frac{n+1}{2}}\right)$, è pure contenuta in questa. Similmente $\sigma_{i_1\, i_2 \ldots i_{\frac{n+1}{2}}}$ è contenuta nella stessa $\lambda_{i_1}\left(i_2 \ldots i_{\frac{n+1}{2}}\right)$. Perciò questo σ e f_{i_1} hanno un punto comune

$$P_{i_1}\left(i_2 \ldots i_{\frac{n+1}{2}}\right) = f_{i_1}\, \sigma_{i_1 i_2 \ldots i_{\frac{n+1}{2}}}$$

Così ogni piano $\sigma_{i_1\, i_2 \ldots i_{\frac{n+1}{2}}}$ taglia le rette $f_{i_1}\, f_{i_2} \ldots f_{i_{\frac{n+1}{2}}}$ in un gruppo $G_{\frac{n+1}{2}}$ di punti

$$P_{i_1}\left(i_2\, i_3 \ldots i_{\frac{n+1}{2}}\right)\, P_{i_2}\left(i_1\, i_3 \ldots i_{\frac{n+1}{2}}\right) \ldots P_{i_{\frac{n+1}{2}}}\left(i_1\, i_2 \ldots i_{\frac{n-1}{2}}\right),$$

che è apolare.

Inoltre $\pi_{i_{\frac{n+3}{2}} \ldots i_n}$ contiene $\sigma_{i_1\, i_{\frac{n+3}{2}} \ldots i_n}$, e quindi $P_{i_1}\left(i_{\frac{n+3}{2}} \ldots i_n\right)$ ne segue che anche

$$P_{i_1}\left(i_{\frac{n+3}{2}} \ldots i_n\right),\ P_{i_2}\left(i_{\frac{n+3}{2}} \ldots i_n\right) \ldots P_{i_{\frac{n+1}{2}}}\left(i_{\frac{n+3}{2}} \ldots i_n\right)$$

è un gruppo apolare.

Dunque

Sopra ogni retta f_{i_1} esistono $\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} = \frac{\lfloor n-1}{\left(\lfloor \frac{n-1}{2}\right)^2}$ punti

$P_{i_1\left(i_2 \cdots i_{\frac{n+1}{2}}\right)}$, e quindi sulle n rette si hanno in tutto

$n\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} = \frac{|\underline{n}}{\left(|\underline{\frac{n-1}{2}}\right)^2}$ punti, che combinati opportunamente

danno origine a $2\binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \frac{4\,|\underline{n}}{(n+1)\left(|\underline{\frac{n-1}{2}}\right)^2}$ gruppi $G_{\frac{n+1}{2}}$

apolari (due per ogni gruppo di $\frac{n+1}{2}$ rette).

2) *n pari*

Un punto qualunque P_{i_1} della retta f_{i_1} determina un aggruppamento $(A_{p+2})_{n-1}$ polare di P_{i_1} rispetto al dato $(A_{p+1})_n$. Essendo $n-1$ dispari, sopra $\frac{n}{2}$ rette $f_{i_2}\, f_{i_3} \cdots f_{i_{\frac{n}{2}+1}}$ esistono due gruppi apolari $G_{\frac{n}{2}}$, $G'_{\frac{n}{2}}$ per l' $(A_{p+2})_{n-1}$ determiato da P_{i_1}. Allora anche i due gruppi $\left(P_{i_1}\, G_{\frac{n}{2}}\right)$, $\left(P_{i_2}\, G'_{\frac{n}{2}}\right)$ sono apolari per l' $(A_{p+2})_n$ dato.

Se P_{i_1} percorre la f_{i_1} si hanno in tal guisa due sistemi di ∞' gruppi apolari per l' $(A_{p+1})_n$.

6. Illustriamo con qualche esempio ciò che è stato detto nel § precedente.

1) Sia $n=3$, $p=0$. L'aggruppamento $(A_1)_3$ è formato dalle terne di punti d'intersezione di tre rette f_1, f_2, f_3 nello spazio ordinario (sghembe due a due) coi piani di una stella, il cui centro (B) non giace sopra alcuna delle rette suddette.

In questo caso si hann tre piani $\pi_i = \mathrm{B}f_i$ $(i, h, k = 1, 2, 3)$ tre rette $\sigma_{ih} = \pi_i\,\pi_h$ per B che incontrano f_i, f_h, e sei punti $P_{i(h)} = f_i\,\sigma_{ih}$. Questi sei punti danno origine ai seguenti gruppi apolari

$$P_{(3)2}\;P_{(2)3}\;;\quad P_{2(1)}\;P_{3(1)}$$

$$P_{(1)3}\;P_{(3)1}\;;\quad P_{3(2)}\;P_{1(2)}$$

$$P_{(2)1}\;P_{(1)2}\;;\quad P_{1(3)}\;P_{2(3)}.$$

2) Sia $n=4$, $p=-1$. L'aggruppamento $(A_0)_3$ è formato dai gruppi G_4 di punti d'intersezione di quattro rette $f_1\, f_2\, f_3\, f_4$ dello spazio ordinario, sghembe due a due, coi piani del medesino.

Un punto P_i di f_i determina un aggruppamento $(A_1)_3{}^{P_i}$ polare sulle rette f_h, f_k, f_l $(i, h, k, l = 1, 2, 3, 4)$, e quindi due coppie apolari su f_h, f_k. Facendo scorrere P_i sulle f_i otteniamo due sistemi di ∞' terne apolari su $f_i\, f_h\, f_k$.

3) Sia $n=5$, $p=0$. Abbiamo così un $(A_1)_5$ su cinque rette dello spazio [5] formato dai gruppi che si ottengono secando cinque rette f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 coi [4] che passano per un punto B (base).

In questo caso si hanno $\binom{5}{2}=10$ spazi [4], $\pi_{ih} = B f_i f_h$ $(i, h, k, l, m = 1, 2, 3, 4, 5)$, $\binom{5}{3}=10$ spazi [2] $\sigma_{ikh} = \pi_{hk}\, \pi_{ki}\, \pi_{ih}$, e 30 punti $P_{i(hk)}$, che dànno origine a 20 terne apolari dei due tipi

$$P_{i(hk)}\; P_{h(ki)}\; P_{k(ih)}\;;\quad P_{i(lm)}\; P_{h(lm)}\; P_{k(lm)}.$$

Ogni punto P appartiene a due terne apolari, per es. $P_{i(hk)}$ appartiene alle due terne

$$P_{i(hk)}\; P_{h(ki)}\; P_{k(ih)}\;;\quad P_{i(hk)}\; P_{l(hk)}\; P_{m(hk)}.$$

7. Teorema. — La dimensione p della base (B) di un aggruppamento $(A_{p+1})_n$ deve essere $\leqq n-1$.

Supponiamo che le n rette $f_1\, f_2 \ldots f_n$, sulle quali è dato un $(A_{p+1})_n$ siano tutte contenute in $[n+p-s]$. Poichè un $[a]$ ed un $[b]$ contenuti in un $[m]$ hanno in comune un $[a+b-m]$ se $a+b \geqq m$, la base (B) incontrerà questa $[n+p-s]$ in un $[p-s]$ e ogni $[n+p-1]$ incontrerà lo stesso $[n+p-s]$ in un $[n+p-s-1]$. Ne segue che l'aggruppamento dato $(A_{p+1})_n$ potrà anche riguardarsi come formato dai gruppi di punti che si ottengono tagliando le n rette $f_1\, f_2 \ldots f_n$ contenute nell $[n+p-s]$ con gli $[n+p-s-1]$ che hanno un $[p-s]$ comune, ossia è un $(A_{p-s+1})_n$.

Siccome n rette, se sono in posizione generale individuano sempre un $[2n-1]$, così tutti gli aggruppamenti proiettivi di ordine n potranno esser contenuti in uno spazio di cui il numero delle dimensioni è $\leqq 2n-1$ e quindi $p \leqq n-1$.

8. Supponiamo che k rette $f_1, f_2 .,. f_k$ fra le n rette $f_1 f_2 ... f_n$ abbiano una posizione particolare, per la quale insieme con la base (B) sieno contenute in un $[p+k]$. In questo caso sulle rimanenti rette $f_{k+1} ... f_n$ resta determinato un aggruppamento $(A_{p+k+1})_{n-k}$, i gruppi del quale sono tutti apolari.

Infatti $n-k-1$ punti scelti su altrettante fra le $n-k$ rette $f_{k+1} ... f_n$ individuano col $[p+k]$ sopra indicato un $[n+p-1]$ che determina un punto della retta rimanente. — Resta così determinata sulle $f_{k+1} ... f_n$ un aggruppamento $(A_{p+k+1})_{n-k}$ ogni gruppo G_{n-k} del quale insieme con qualsiasi gruppo G_k di punti presi sulle $f_1 ... f_k$ forma un gruppo G_n dell' $(A_{p+1})_n$ dato.

Inoltre tutti i $[p+k-1]$ contenenti la base (B) incontrano tutte le $f_1 ... f_k$ e determinano su di esse un aggruppamento $(A_{p+1})_k$, i gruppi del quale sono tutti apolari. Infatti $n-k$ punti scelti ad arbitrio sulle $f_{k+1} ... f_n$ insieme con uno qualunque dei suddetti $[p+k-1]$ determinano un $[p+n-1]$ contenuto in $[n+p]$ e contenente la base (B). Ciò prova che ogni gruppo G_k dell'aggruppamento $(A_{p-1})_k$ sulle $f_1, f_2 ... f_k$ insieme con un gruppo qualsiasi G_{n-k} di punti delle $f_{k+1} ... f_n$ costituisce un gruppo G_n dell'aggruppamento $(A_{p+1})_n$. Dunque:

Se k rette $f_1, f_2 ... f_k$ e la base (B) di un $(A_{p+1})_n$ sono contenute in un $[p+k]$, l' $(A_{p+1})_n$ è costituito dai gruppi G_k di un $(A_{p+1})_k$ su $f_1 ... f_k$ combinati con tutti i possibili gruppi G_{n-k} delle $f_{k+1} ... f_n$ e dai gruppi G_{n-k} di un $(A_{n+k+1})_{n-k}$ sulle $f_{k+1} ... f_n$ con tutti i possibili gruppi G_k delle $f_1 ... f_k$; ossia l' $(A_{p+1})_n$ si spezza in un $(A_{p+1})_k$ sulle $f_1 f_2 ... f_k$ e in un $(A_{n+p+1})_{n-k}$ sulle $f_{k+1} ... f_n$.

Esempio. — Se $p=0$, $n=3$, $k=2$, e quindi $n-k=1$, abbiano per l' $(A_1)_3$ la seguente proprietà.

Se f_1, f_2, f_3 sono tre rette, due delle quali (f_1, f_2) sono in un piano π ed 0 è un punto di questo piano, l'aggruppamento prospettivo $(A_1)_3$ che ha per base il punto 0 si spezza nell' $(A_1)_2$ sulle f_1, f_2 rispetto alla base 0 e nell' $(A)_1$ che è il punto $f_3\pi$.

9. Nel § precedente abbiamo visto che un aggruppamento prospettivo di ordine n può spezzarsi in due ordine k ed $n-k$. Questi possano alla loro volta spezzarsi, e così di seguito, cosicchè un aggruppamento di ordine n può spezzarsi in s aggruppamenti degli ordini $n_1, n_2 ... n_s$, essendo $n_1+n_2+...+n_s=n$.

Un aggruppamento prospettivo di ordine n si dice singolare se si scompone in n aggruppamenti prospettivi del 1° ordine.

È evidente che

1) Un (A_{p+1}), su n rette $f_1 \ldots f_n$ concorrenti in un punto è singolare.

2) Se un aggruppamento prospettivo è singolare, sono singolari tutti gli aggruppamenti polari rispetto ad esso.

10. Dati s aggruppamenti prospettivi $(A_{p+1}{}^{(1)})$, $(A_{p+1}{}^{(2)})$, $\ldots (A_{p+1}{}^{(s)})$, di ordine n e specie $p+1$, sulle stesse n rette, aventi rispettivamente per basi gli spazi (B^{1}), $(B^{2}) \ldots (B^{s})$, è evidente che i gruppi ad essi comuni sono tutti e soli quelli individuati dagli spazi $[n+p-1]$ che contengono tutte queste basi, supposto che esistano.

Supponiamo che queste basi abbiano in comune un $[q]$. Allora essi appartengono ad uno spazio $[sp-(s-1)q]$. Se

$$sp-(s-1)q=n+p-1,$$

ossia

$$(s-1)(p-q)=n-1,$$

esiste dunque uno ed un solo $[n+p-1]$ che contiene (B^{1}) $(B^{2}) \ldots (B^{s})$ e quindi un sol gruppo comune agli aggruppamenti dati.

Se

$$(s-1)(p-q)<n-1,$$

e si pone

$$(s-1)(p-q)+t=n-1,$$

le s basi (B^{i}) appartengono ad un $[n+p-1-t]$ base di un sistema lineare di ∞^{t} $[n+p-1]$, ognuno dei quali individua un gruppo comune agli s aggruppamenti dati.

Se

$$(s-1)(p-q)=n$$

non esistono gruppi comuni.

determinare un $(A_1)_2$ che contenga quattro gruppi dati ad arbitrio.

Presi invece tre gruppi $G_2^{(1)}$ $G_2^{(2)}$ $G_2^{(3)}$, questi individuano tre rette r_1, r_2, r_3 alle quali si appoggiano le ∞' rette s di una serie rigata. Tutte le rette che incontrano f_1, f_2 e una della s incontrano anche tutte le altre, e quindi ognuna delle s è asse di un fascio di piani che sulle f_1, f_2 determinano la unica proiettività alla quale appartengono i tre gruppi $G_2^{(1)}$, $G_2^{(2)}$, $G_2^{(3)}$.

A OBRA SCIENTIFICA E A VIDA DO CHIMICO PORTUGUEZ ROBERTO DUARTE SILVA

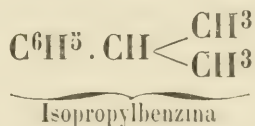
POR

A. J. Ferreira da Silva

(Continuação)

V

Outra serie de trabalhos originaes occuparam o nosso compatriota no periodo de 1878 a 1885, nas poucas e interrompidas horas que lhe sobravam do desempenho das suas funcções officiaes de ensino, que elle desempenhava com um zelo e consciencia inexcediveis: referimo-nos á preparação de diversos hydrocarbonetos aromaticos pelo methodo de synthese dos srs. **Friedel** e **Crafts**, baseado no emprego do chloreto de aluminio [1].

O carboneto que primeiro obteve por synthese foi o *cumeno* ou *isopropylbenzina* C^9H^{12}

obtido na reacção do chloreto de isopropylo ou do chloreto de

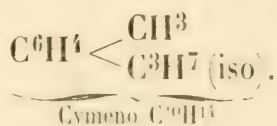
[1] Veja-se, a respeito d'este methodo, a exposição feita na nossa *Noticia sobre a vida e os trabalhos scientificos de* Charles Friedel. Coimbra, 1899, pagg. 19-21.

propylo normal sobre a benzina em presença do chloreto de aluminio. ROBERTO SILVA observou nas suas experiencias que o ponto de ebulição do carboneto obtido por meio de chloreto de propylo era superior em 2° ao que se preparava por meio do chloreto de isopropylo, e, não obstante ter-lhe sido impossivel encontrar outro caracter differencial entre os dois productos, pensou a principio na existencia de dois cumenos isomeros — um que seria a propylbenzina, outro a isopropylbenzina; mais tarde, porém, reconheceu que os dois productos eram identicos, e que na reacção com o chloreto de propylo havia a transformação do radical propylo em isopropylo, effectuada sob a influenciu do chloreto de aluminio, como fôra demonstrado pouco antes por KEKULÉ e SCHRÖTTER [1].

A isopropylbenzina é um liquido incolor, muito movel, menos denso do que a agua, de cheiro muito suave; o ponto de ebulição da que procede do chloreto de propylo é 152,5-153,5°, e da que resulta do chloreto de isopropylo, 151-152°.

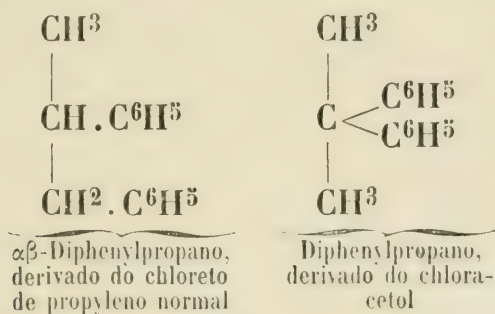
Indirectamente, e como producto secundario, obtem-se ainda o mesmo hydrocarboneto na acção do chloreto de allylo C^3H^5Cl, do 2,2-dichloropropano $CH^3.CCl^2.CH^3$ (methylchloracetol, ou chloracetol de FRIEDEL) e do 2-propyleno chlorado $CH^3.CCl:CH^2$ sobre a benzina em presença do chloreto de aluminio.

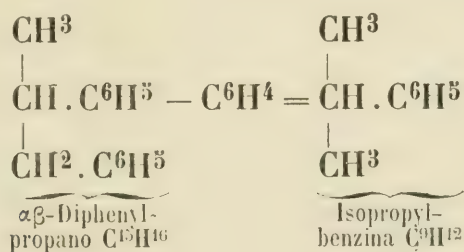
Um outro carboneto de grande importancia, porque existe nos oleos essenciaes de muitas plantas, e que se obtem facilmente aquecendo a camphora $C^{10}H^{16}O$ com o anhydrido phosphorico ou com o pentasulfureto do phosphoro, é o *cymeno* $C^{10}H^{14}$, que tambem se pode denominar *para-methylisopropylbenzina* ou isopropyltolueno (1,4-methylmethoethylpheno):

$$\underbrace{C^6H^4 < \begin{matrix} CH^3 \\ C^3H^7 \text{ (iso)} \end{matrix}}_{\text{Cymeno } C^{10}H^{14}}.$$

ROBERTO DUARTE SILVA preparou-o syntheticamente fazendo reagir o chloreto de isopropylo sobre o tolueno em presença do chloreto de aluminio. É um liquido incolor, muito refringente, de

(1) Veja-se *Bulletin de la Société chimique de Paris*, 2.e série, t. XXVIII, pag. 529; t. XXIX, pag. 145 e t. XLIII, pagg. 317-318.

cheiro muito parecido com o cymeno da camphora, e fervendo entre 172 e 173° ([1]).

Obteve tambem dois *diphenylpropanos isomeros* $C^{15}H^{16}$: um é o producto principal da reacção do chloreto de allylo $CH^2:CH.CH^2Cl$ e do chloreto de propyleno normal $CH^3.CHCl.CH^2Cl$ sobre a benzina; o outro resulta da acção do *chloracetol de* **Friedel** $CH^3.CCl^2.CH^3$ ou do 2-chloropropyleno (que **Silva** chamava propyleno monochlorado de acetona) $CH^3.CCl:CH^2$ sobre a benzina ([2]):

O primeiro é um liquido insoluvel na agua, soluvel no alcool, no ether e no sulfureto de carbono, e ferve a 277-279°; o ponto de ebullição correcto, segundo **Krämer** e **Spilker**, é 291-293°; perdendo um grupo phenyleno C^6H^4 gera a isopropylbenzina, a que nos referimos:

$$\underbrace{\begin{array}{l} CH^3 \\ | \\ CH.C^6H^5 \\ | \\ CH^2.C^6H^5 \end{array}}_{\substack{\alpha\beta\text{-Diphenyl-} \\ \text{propano } C^{15}H^{16}}} - C^6H^4 = \underbrace{\begin{array}{l} CH^3 \\ | \\ CH.C^6H^5 \\ | \\ CH^3 \end{array}}_{\substack{\text{Isopropyl-} \\ \text{benzina } C^9H^{12}}}$$

segundo a explicação de **Friedel**.

([1]) *Bulletin de la Societé chimique de Paris,* 2.º série, t. XXIX, pag. 193; t. XLIII, pag. 321.

([2]) *Bulletin de la Societé chimique de Paris,* 2.º série, t. XXXIV, pag. 674; t. XLIII, pag. 318; **Wurtz**, *Supplement au Dictionnaire de Chimie*, t. 1.º, pag. 562; e *Congrès d'Alger de l'Association française pour l'avancement des sciences,* 1881, pag. 350.

O segundo, mais conhecido pelo nome de dimethyldiphenylmethano, é liquido e ferve a 281-282° [1].

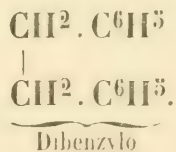
Na reacção que dá origem a este corpo, quando se emprega o propyleno monochlorado, obtem-se tambem um *cumeno*, de P.E = 155°; é uma *diisopropylbenzina* $C^{12}H^{18}$, que ferve a 202-206°, identica á que se obtem fazendo passar a corrente de chloreto de isopropylo sobre a benzina, addicionada de chloreto de aluminio [2]:

$$C^6H^4 < \begin{matrix} CH(CH^3)^2 \\ CH(CH^3)^2. \end{matrix}$$

o-Diisopropylbenzina

Na ideia de obter um corpo homologo inferior dos anteriores e de ponto de ebulição menos elevado, Roberto Silva fez reagir o chloreto d'ethyleno $C^2H^4Cl^2$ sobre a benzina em presença do chloreto de aluminio; e, contra o que esperava, obteve um corpo crystallisavel, de ponto de ebulição quasi tão elevado como o diphenylpropano. O exame cuidadoso da nova substancia mostrou-lhe que assim obtivera o *dibenzylo* $C^{14}H^{14}$, que Cannizzaro e Rossi tinham preparado na acção do sodio sobre o chloreto de benzylo:

$$\begin{matrix} CH^2.C^6H^5 \\ | \\ CH^2.C^6H^5. \end{matrix}$$

Dibenzylo

É o *diphenylethano symetrico* (*Phenylethanphenylo*) [3], cujo ponto de ebulição é 280-285° e o de fusão a 52-53°, e se pode obter dos seus solutos no ether em crystaes prismaticos, pertencentes ao systema orthorhombico [4].

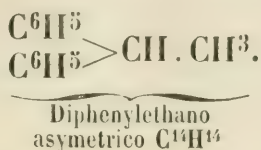
---

(1) *Bulletin de la Societé chimique de Paris*. 2.e série, t. XXXI, pag. 2; e *Comptes rendus*. t. LXXXIX, pagg. 606-608.

(2) *Bulletin de la Societé chimique de Paris*. 2.e série, t. XXVIII, pag. 529; t. XXXIV, pag. 674; t. XXXV, pag. 289; t. XLIII, pag. 320.

(3) Beilstein, *Handbuch der org. Chemie*. 4e Aufl., t. II, pag. 232.

(4) *Comptes rendus*, t. LXXXIX, pagg. 606-608; *Bulletin de la Societé chimique de Paris*, 2.e série, t. XXXVI, pagg. 1 e 24. O ponto de ebulição do dibenzylo é apontado no livro de Berthelot e Jungfleisch, 4e édit., pag. 173, como sendo 284° e o ponto de fusão 52°,5.

É isomero d'este carboneto o *diphenylethano asymetrico (diphenylmethylmethano, a-diphenylethano)*, que elle egualmente obteve por um processo semelhante, mas usando o chloreto d'ethylideno, em vez do chloreto do ethyleno:

Este corpo, que é liquido, ferve a 270° (1), tem cheiro agradavel, é fortemente refringente, tem fluorescencia azul, e o seu peso especifico é elevado; pode solidificar pelo resfriamento por meio d'uma mistura frigorica, e os crystaes fundem á temperatura ordinaria (2).

Mas na reacção que dá origem ao dibenzylo forma-se um pouco de *ethylbenzina*, que passa primeiro á destillação, e que talvez resulte da acção reductora do chloreto de aluminio, descoberta por Friedel e que Roberto Silva tinha apurado em diversos casos; e corpos ainda menos volateis que o dibenzylo, que passam entre 285 e 360°: dois liquidos e um crystalisado, parecendo-se com o triphenylethano o primeiro dos productos liquidos, com um ponto de ebulição de cerca de 340°.

Este ponto de vista, porém, não chegou Roberto Silva a confirma-lo por experiencias e determinações directas.

VI

Os restantes trabalhos originaes de Roberto Duarte Silva são os que realisou em collaboração com o seu dilecto amigo e grande mestre de chimica francesa, Friedel.

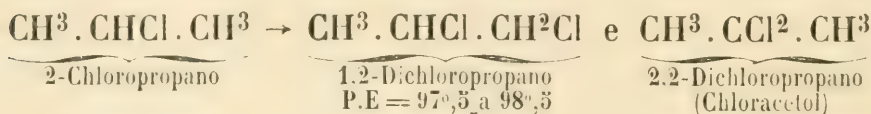
Refere-se um dos grupos dessas investigações a diversos compostos em C^3, cujo resultado mais importante foi a synthese total da glycerina.

---

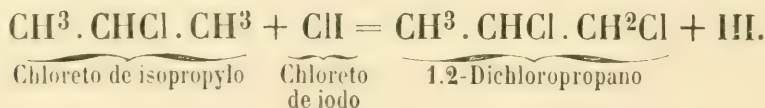
(1) Beilstein, *ob. cit.*, pag. 231. No livro citado de Berthelot e Jungfleisch, pag. 172, vem, por erro typographico, o numero 27.°

(2) As notas de Silva sobre este corpo encontram-se no *Bulletin de la Societé chimique de Paris*, 2.e série, t. XXXVI, pag. 66; e t. XLI, pag. 448.

Reconheceram os dois auctores que na *acção do chloro sobre o chloreto de isopropylo* $C^3H^7Cl = CH^3.CHCl.CH^3$ se obtem *dois chloropropanos* $C^3H^6Cl^2$ *isomeros:* um, em pequena quantidade, é o chloreto de propyleno ordinario ou 1,2-dichloropropano, que é identico ao que resulta da acção directa do chloro sobre o propyleno; outro é um isomero, a que pozeram o nome de *methylchloracetol* ou simplesmente *chloracetol,* que deriva da acetona pela substituição do oxygenio pelo chloro.

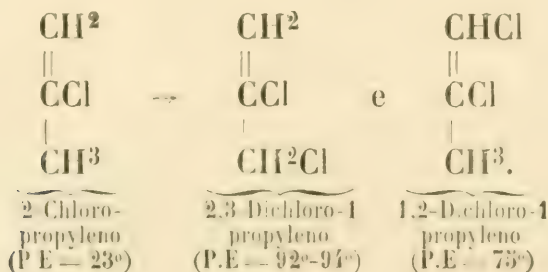
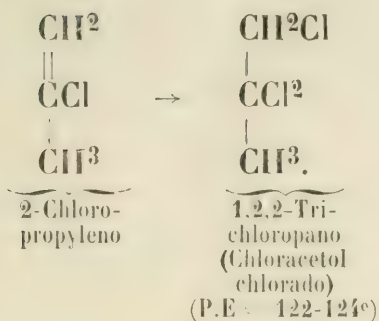
$$\underbrace{CH^3.CHCl.CH^3}_{\text{2-Chloropropano}} \rightarrow \underbrace{CH^3.CHCl.CH^2Cl}_{\substack{\text{1.2-Dichloropropano} \\ \text{P.E} = 97^\circ,5 \text{ a } 98^\circ,5}} \text{ e } \underbrace{CH^3.CCl^2.CH^3}_{\substack{\text{2.2-Dichloropropano} \\ \text{(Chloracetol)}}}$$

Eis aqui o primeiro exemplo, conhecido na **série** gorda, da isomeria de posição, realisada na mesma reacção sobre um corpo unico.

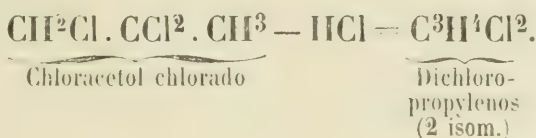
Fazendo, **porém**, actuar sobre o mesmo chloreto de isopropylo, não o chloro, mas o chloreto de iodo a **100°**, obtem-se apenas o chloreto de propyleno, em que os dois atomos de chloro estão ligados a atomos de carbono diversos, isto é, o **1,2**-dichloropropano:

$$\underbrace{CH^3.CHCl.CH^3}_{\text{Chloreto de isopropylo}} + \underbrace{ClI}_{\substack{\text{Chloreto} \\ \text{de iodo}}} = \underbrace{CH^3.CHCl.CH^2Cl}_{\text{1.2-Dichloropropano}} + HI.$$

Mostraram ainda que fazendo reagir o *chloro sobre o propyleno monochlorado* C^3H^5Cl *na obscuridade,* se obtinham dois propylenos bichlorados $C^3H^4Cl^2$ isomeros, reacção que é, como se vê, uma substituição.

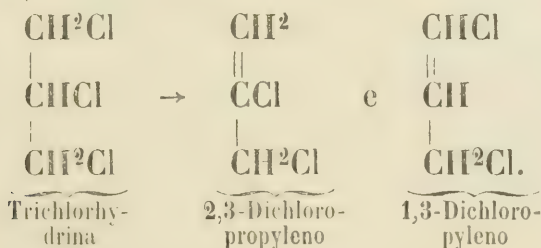
Mas se a reacção se fizer *á luz,* o resultado é uma addição ou fixação de chloro, e o producto é o chloracetol chlorado $C^3H^5Cl^3$.

Na obscuridade:

$$\underbrace{\begin{array}{c} CH^2 \\ \| \\ CCl \\ | \\ CH^3 \end{array}}_{\substack{\text{2 Chloro-} \\ \text{propyleno} \\ (\text{P E} = 23^\circ)}} \rightarrow \underbrace{\begin{array}{c} CH^2 \\ \| \\ CCl \\ | \\ CH^2Cl \end{array}}_{\substack{\text{2.3 Dichloro-1} \\ \text{propyleno} \\ (\text{P.E} = 92^\circ\text{-}94^\circ)}} \text{ e } \underbrace{\begin{array}{c} CHCl \\ \| \\ CCl \\ | \\ CH^3. \end{array}}_{\substack{\text{1.2-Dichloro-1} \\ \text{propyleno} \\ (\text{P.E} = 75^\circ)}}$$

Á luz:

Os dois dichloropropylenos, de que acabamos de fallar, são identicos ao que se obtem na acção da agua ou da potassa alcoolica sobre o chloracetol chlorado:

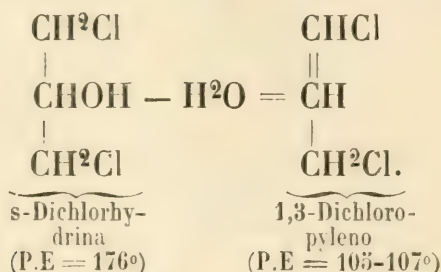
$$\underbrace{CH^2Cl \,.\, CCl^2 \,.\, CH^3}_{\text{Chloracetol chlorado}} - HCl = \underbrace{C^3H^4Cl^2}_{\text{Dichloropropylenos (2 isom.)}}.$$

Mostraram tambem que eram identicos o chloropropyleno C^3H^5Cl derivado do chloracetol e o derivado do chloreto de propyleno (1).

Fazendo reagir a potassa alcoolica sobre a trichlorhydrina, obteem-se tambem dois propylenos dichlorados: um é identico ao 2,3-dichloropropyleno, já referido; o outro, diverso dos dois já mencionados, é a β-epichlorhydrina, chamada, na linguagem de hoje, 1,3-dichloropropyleno, fervente nas proximidades de 106°:

CH²Cl | CHCl | CH²Cl	→	CH² || CCl | CH²Cl	e	CHCl || CH | CH²Cl.
Trichlorhydrina		2,3-Dichloropropyleno		1,3-Dichloropyleno

Assim foi demonstrada a existencia de tres propylenos bichlorados $C^3H^4Cl^2$.

(1) *Bulletin de la Societé chimique de Paris,* 2.ª série, t. XV, pagg. 4-5. São ambos o 2-chloropropyleno.

Este ultimo, a *β-epidichlorhydrina,* é o que se obtem na acção do oxychloreto de phosphoro ou do anhydrido phosphorico sobre a dichlorhydrina ([1]); fôra obtido por Reboul, mas não no estado de pureza, tratando ([2]) a trichlorhydrina pela potassa caustica solida:

$$\underbrace{\begin{matrix} CH^2Cl \\ | \\ CHOH \\ | \\ CH^2Cl \end{matrix}}_{\substack{\text{s-Dichlorhy-} \\ \text{drina} \\ (P.E = 176^o)}} - H^2O = \underbrace{\begin{matrix} CHCl \\ \| \\ CH \\ | \\ CH^2Cl. \end{matrix}}_{\substack{\text{1,3-Dichloro-} \\ \text{pyleno} \\ (P.E = 105\text{-}107^o)}}$$

Havendo reconhecido que na acção do chloreto de iodo sobre o chloreto de isopropylo, o chloro ia substituir o hydrogenio n'um radical methylo ainda não chlorado, formando-se apenas o 1,2-dichloropropano $CH^3 . CHCl . CH^2Cl$ (chloreto de propyleno ordinario), pensaram que, tratando tambem pelo mesmo reagente este ultimo chloreto resultaria a trichlorhydrina; se assim fosse, por saponificação aquosa d'esta ultima, obter-se-hia a glycerina, conforme o methodo já indicado por Berthelot para regenerar esta ultima. Esta previsão foi realisada: o chloreto de propyleno, pela acção, a 140°, do chloreto de iodo secco em vasos fechados, gera, de facto, o trichloropropano, identico á trichlorhydrina.

As suas primeiras investigações foram feitas sobre o propyleno ou propeno, obtido por meio do iodeto de allylo ([3]), o qual deriva, como é sabido, da glycerina. Mas o propyleno pode-se obter a partir do alcool isopropylico por deshydratação, e os dois auctores demonstraram que o chloreto de isopropylo, quer provenha do iodeto de isopropylo preparado com a glycerina, quer do alcool isopropylico obtido pela hydrogenação da acetona, é sempre o mesmo corpo ([4]).

([1]) *Bulletin de la Societé chimique de Paris,* 2.ᵉ série, t. XVIII, pag. 50.

([2]) O producto principal d'esta reacção é a α-epidichlorhydrina ou 2,3-dichloropropyleno $CH^2Cl . CCl : CH^2$.

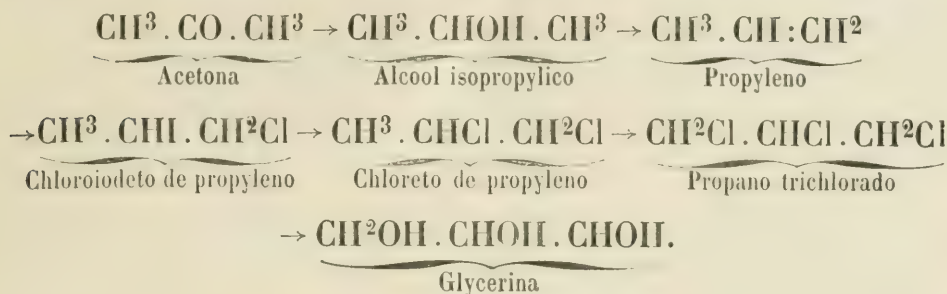
([3]) *Bulletin de la Societé chimique de Paris,* 2.ᵉ série, t. XVIII, 1872, pag. 7.

([4]) *Bulletin de la Societé chimique de Paris,* 2.ᵉ série, t. XVIII, 1872, pagg. 7-9.

Vê-se que esta synthese da glycerina se realisa independentemente de qualquer composto allylico, já derivado da glycerina, e que assim é realmente uma *synthese total da glycerina:*

$$\underbrace{CH^3.CO.CH^3}_{\text{Acetona}} \rightarrow \underbrace{CH^3.CHOH.CH^3}_{\text{Alcool isopropylico}} \rightarrow \underbrace{CH^3.CH:CH^2}_{\text{Propyleno}}$$

$$\rightarrow \underbrace{CH^3.CHI.CH^2Cl}_{\text{Chloroiodeto de propyleno}} \rightarrow \underbrace{CH^3.CHCl.CH^2Cl}_{\text{Chloreto de propyleno}} \rightarrow \underbrace{CH^2Cl.CHCl.CH^2Cl}_{\text{Propano trichlorado}}$$

$$\rightarrow \underbrace{CH^2OH.CHOH.CHOH.}_{\text{Glycerina}}$$

Este *chloroideto de propyleno*, que ferve a 149°, obtem-se facilmente fazendo passar n'um soluto aquoso concentrado e limpido de protochloreto de iodo o gaz propyleno; e do chloroideto de propyleno facilmente se passa ao *chloreto de propyleno*, aquecendo-o a 100° em vasos fechados, durante 16 a 20 horas, com o bichloreto de mercurio em quantidade conveniente (1).

Ainda mostraram que na acção do chloreto de mercurio sobre o brometo de propyleno $C^3H^6Cl^2$ se obtem um *chlorobrometo de propyleno* (2) $C^3H^6ClBr = CH^3.CHCl.CH^2Br$, liquido que ferve a 120°; que, quando o bromo actua sobre o chloroformio, se forma o chlorobrometo de carbono, ou, melhor, o *trichlorobromomethano* CCl^3Br, corpo liquido, P.E = 104°, um tanto parecido com o chloreto de carbono (3); e que quando o bromo actua sobre a α-epidichlorhydrina se obtem um dichlorodibromopropano $C^3H^4Cl^2Br^2$, ferverte a 205°, que é o *1,2-dichloro-2,3-dibromopropano* $CH^2Cl.CClBr.CH^2Br$ (4).

Como derivante d'estas investigações, tentaram os dois chimicos verificar se na acção do chloreto de iodo secco sobre o chloroformio se obteria um chloroiodeto de carbono CCl^3I; a reacção não se manifestou nesse sentido; formou-se acido chlor-

---

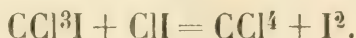
(1) *Bulletin de la Societé chimique de Paris*, 2e serie, t. XVII, 1872, pag. 535-537.

(2) *Bulletin de la Societé chimique de Paris*, 2e série, t. XVII, 1872, pag. 532.

(3) *Bulletin de la Societé chimique de Paris*, 2e série, t. XVII, 1872, pagg. 538-539.

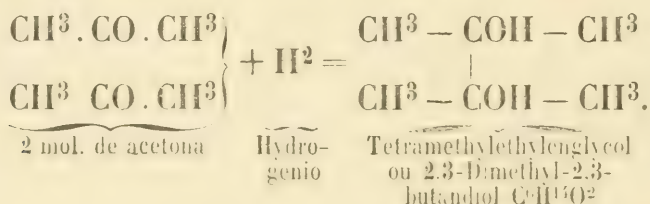
(4) *Bulletin de la Societé chimique de Paris*, 2e série, t. XV, 1871, pag. 4.

hydrico, separou-se iodo, e o producto da reacção foi o tetrachloreto de carbono (¹); segundo elles, forma-se provavelmente primeiro o chloroiodeto de carbono, que depois é destruido pelo chloreto de iodo:

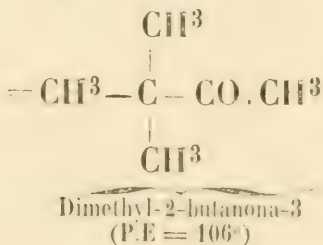
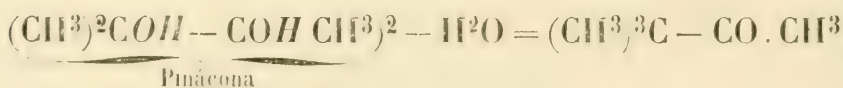
$$CCl^3I + ClI = CCl^4 + I^2.$$

VII

O outro grupo de investigações originaes feitas em commum com Friedel refere-se a derivados interessantes da acetona.

Sabe se que por hydrogenação da acetona aquosa pelo amalgama do sodio se obtem um alcool secundario em C^3, que é o alcool isopropylico; pela reducção operada sobre a acetona humida pelo sodio em meio alcalino, obtem-se, além do alcool isopropylico, um producto de condensação, crystallysado, P.F = 38°, a *pinácona*, que Friedel definiu como *glycol biterciario:*

$$\underbrace{\left.\begin{matrix} CH^3.CO.CH^3 \\ CH^3.CO.CH^3 \end{matrix}\right\}}_{\text{2 mol. de acetona}} + \underbrace{H^2}_{\text{Hydrogenio}} = \underbrace{\begin{matrix} CH^3 - COH - CH^3 \\ | \\ CH^3 - COH - CH^3. \end{matrix}}_{\text{Tetramethylethylenglycol ou 2.3-Dimethyl-2.3-butandiol } C^6H^{14}O^2}$$

D'este corpo deriva, por uma reacção especial provocada pelo aquecimento com o acido sulfurico diluido, um anhydrido, que é uma acetona, a trimethylacetona, que se chama resumidamente *pinacolina* $C^6H^{12}O$:

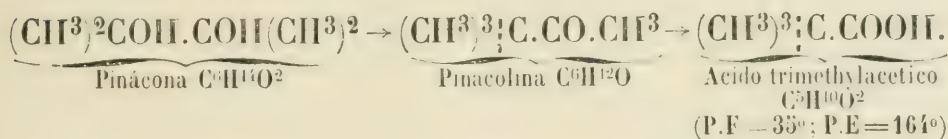
$$\underbrace{(CH^3)^2COH - COH(CH^3)^2}_{\text{Pinácona}} - H^2O = (CH^3)^3C - CO.CH^3$$

$$= \underbrace{\begin{matrix} CH^3 \\ | \\ CH^3 - C - CO.CH^3 \\ | \\ CH^3 \end{matrix}}_{\substack{\text{Dimethyl-2-butanona-3} \\ \text{(P.E = 106°)}}}$$

(¹) *Bulletin de la Société chimique de Paris*, 2ᵉ série, t. XVII, 1872, pagg. 537-558.

A hydrogenação da pinacolina pelo amalgama de sodio dá origem á formação de um alcool terciario, o *alcool pinacolico* $C^6H^{14}O$, crystallisavel e fusivel a $+4°$; e este oxydado moderadamente regenera a pinacolina.

A oxydação da pinacolina pelo acido chromico dá um acido em C^5, o *acido pivalico*, identico ao acido trimethylacetico ou dimethylpropionico, isomero do acido valerico, e já preparado, por outro modo, por **Boutlerow**:

$$\underbrace{(CH^3)^2COH.COH(CH^3)^2}_{\text{Pinácona } C^6H^{14}O^2} \rightarrow \underbrace{(CH^3)^3\vdots C.CO.CH^3}_{\text{Pinacolina } C^6H^{12}O} \rightarrow \underbrace{(CH^3)^3\vdots C.COOH.}_{\text{Acido trimethylacetico } C^5H^{10}O^2}$$

(P.F $-35°$; P.E$=164°$)

VIII

A estas investigações originaes sobre assumptos delicados de chimica organica devem acrescentar-se os trabalhos praticos de ensino, que exerceu com zelo e dedicação inexcediveis, quer como chefe dos trabalhos chimicos na Escola Central de Artes e Manufacturas desde 1871 a 1886, quer como professor de chimica analytica na mesma escola a partir de 1886; quer ainda como professor de chimica na Escola Municipal de physica e de chimica industriaes de Paris desde 1881 até á sua doença.

Por vezes lhe pediam os seus discipulos e amigos que publicasse o resumo do seu ensino de analyse na Escola Central; mas não o quiz fazer, por não julgar ainda bastante aperfeiçoado o seu trabalho. Foi o seu successor no professorado da Escola Normal, o sr. prof. R. **Engel**, que n'um livro muito recommendavel e apreciado deu á luz essas notas e apontamentos, que constituem um guia seguro para os que trabalham nos laboratorios.

O seu devotado amigo, **Ch. Friedel**, prefaciando esta publicação, definiu o alto conceito em que era tido o labôr de **Roberto Silva**:

«Elle consagrára, diz **Friedel**, d'um modo exclusivo, talvez em demasia, em favor de seus amigos. e sem poupar o sufficiente ás suas forças, os ultimos annos da sua vida laboriosa ao ensino da chimica analytica. Desde o dia em que foi nomeado chefe dos trabalhos de chimica analytica na Escola Central, occu-

pava-se em estudar, com a consciencia que punha sempre no cumprimento de seus deveres, e sem perder nunca de vista o interesse de seus discipulos, todos os methodos d'analyse, experimentando-os de per si e escolhendo aquelles que achava mais simples e mais exactos. Em conferencias feitas aos discipulos resumia as indicações uteis para a applicação dos methodos.

«Nomeado mais tarde professor de chimica analytica na Escola Municipal de physica e chimica industriaes, e depois professor de chimica analytica na Escola Central, teve de dar maior desenvolvimento ao seu trabalho. Pela circunstancia de ter redigido as suas conferencias, remodelando-as por diversas vezes afim de as aperfeiçoar cada vez mais, organisou as suas lições com o mesmo cuidado, introduzindo na exposição os processos novos, de cujo valor se certificara por experiencia.

«Foi tal o exito do seu ensino na Escola Central, a orientação que lhe dava era tão pratica, que poucos annos depois de iniciar os seus cursos, foi solicitado a publicar as suas conferencias, fazendo d'ellas um tratado de chimica analytica. Prestou-se com satisfação a este encargo; mas, desconfiando sempre de si proprio, não se tinha resolvido a confiar o seu manuscripto á imprensa quando a morte o surprehendeu.

«Assim se encontraram, entre os seus papeis, um grande numero de lições já completamente redigidas, e muitas notas, planos de conferencias ou de lições, escriptos alguns diversas vezes, e que davam a prova do seu continuo labutar.

«Tendo sido feita uma primeira classificação dos manuscriptos pelo sr. Ph. de Clermont, o sr. Engel, que succedeu a Silva, quiz encarregar-se de preparar a obra para a impressão, eliminando o que se achava duplicado, e acabando a redacção do que se achava simplesmente indicado.»

Com o fim de se aperfeiçoar no conhecimento das linguas e de apreciar os progressos realisados em outras nações em materia de ensino pratico da chimica, realisou Roberto Silva muitas viagens de estudo; e consignou as suas impressões n'uma carta a Dumas, que a fez inserir nos *Annales de chimie et de physique* (1).

(Continúa).

---

(1) *Annales de chimie et de physique*, 5.ª série, t. XXVII, 1882, pag. 565. Esta carta foi depois publicada no *Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes*, de Lisboa, n.º XXXV, 1883.

O CAPITALISMO E AS SUAS ORIGENS EM PORTUGAL

POR

BENTO CARQUEJA

(Continuação)

Seculo XV

O alvorecer do seculo XV não foi dos mais propicios para a formação da propriedade capitalista em Portugal. Até **1411**, luctas incessantes, que só vieram a terminar com a paz confirmada pelo tratado de Aylham [1]; d'ahi até ao meiado do seculo, o arrojado feito de Ceuta, que abriu ao reino, rejuvenescido e orgulhoso da liberdade, a vida nova de aventuras e emprezas arriscadas.

Como consequencia da emigração de parte da nobreza para Castella e da accumulação de seus bens no patrimonio da nobreza real, foram unidas muitas herdades em uma só casa. O mestre de Aviz, que distribuiu, com a maior largueza, os bens da coroa pelo seus parciaes, viu-se obrigado a promulgar provisões restrictivas na *lei mental* [2].

---

[1] FERNÃO LOPES, *Chronica de D. João I*, tomo 2.º, cap. 192.

[2] CARDEAL D. FRANCISCO DE S. LUIZ, *Memoria ácerca das noticias que nos restam do dr. João das Regras e de algumas especies a respeito da lei mental*, tom. 1.º, pag. 255-291.

A reforma dos foraes decretada por D. Manoel foi um acto notavel, mas não realizou, em relação á economia rural do paiz, todas as promessas que apparentava antes. As violencias dos poderosos contra os povos continuavam, a pretexto de arrendarem os direitos e portagens estabelecidos nas cartas da povoação. Para de uma vez pôr cobro ás violencias dos nobres, dispôz o rei que se inserisse no texto dos foraes a lei de D. Fernando, que vedava aos fidalgos tomassem coisa alguma sem primeiro satisfazer o seu preço (1).

No ultimo quartel do seculo XV, os senhores vexavam com o peso dos encargos, que lançavam; os fidalgos, seus criados e familiares exerciam verdadeiras violencias e expoliações. Além dos coutos concedidos pela lei, os mestres das ordens militares, os abbades e prelados e os senhores de grandes casas chegavam a receber em suas villas e castellos os malfeitores, que protegiam. Lançavam derramas sobre as suas aldeias; sonegavam as proprias colheitas; mas iam ás eiras pôr o preço ao grão colhido pelos *villãos* e abarcal-os, para depois os venderem pelo dobro e pelo triplo (2).

A execução da lei das sesmarias transformára-se n'um violento instrumento de oppressões: os nobres, abusando do seu predominio, peitavam os sesmeiros nas localidades e obtinham a entrega das terras, que mais cubiçavam, sem audiencia dos proprietarios, iniquamente despojados.

Ao mesmo tempo que as oppressões dos poderosos se exerciam cruelmente, os judeus creavam para si uma situação dia a dia mais vantajosa.

Com as importantes e valiosas concessões feitas por D. João I, não é para admirar que elles prosperassem, na tranquilidade da sua vida e dos seus haveres. Podiam assim dedicar-se á actividade do commercio e da industria, em que eram verdadeiramente eximios.

Um dos ramos de negocio, a que se entregavam com especial predilecção, mas que não podiam exercer sem licença regia,

(1) J. S. Ribeiro, *Memoria historica, juridica e economica sobre a reforma dos foraes.*

(2) Veja-se a larga referencia a estas oppressões, feita nas côrtes de Evora de 1481-1482.

era a compra do ouro, prata ou moedas; os judeus accusados d'essa compra perdiam os bens, que passavam para a posse dos denunciantes. Facil é calcular quantos abusos se praticavam á sombra d'essa formula; por isso, D. João prohibiu que qualquer judeu, accusado do alludido crime, fosse preso ou expoliado dos seus bens, sem primeiro ser querellado, a querella ser julgada e as testemunhas conhecidas; se a sentença fosse dada a favor do judeu, este receberia «outro tanto quanto esse querelloso averia, se fosse provado» (1).

Com estas e outras concessões conquistaram os judeus uma posição desafogada. Chegaram a figurar como arrendadores-móres das fazendas do reino; contribuiram para a sustentação dos municipios, pagando os da communa do Porto, só pelo tributo de capitação ou de moeda, 2000 maravedis (2) e desempenhavam, protegidos por alguns bispos e concelhos, as funcções de physicos e cirurgiões.

Durante o reinado de D. Duarte, foi retirado aos judeus o exercicio de varios cargos e officios respeitantes á fazenda publica, bem como foi prohibido que os particulares, especialmente os nobres, lhes entregassem a gerencia dos seus haveres (3); eram esses principalmente que se aproveitavam do tacto administrativo e financeiro dos judeus, ferindo-os, porém, sempre que podiam. Apesar de tantas prohibições, os judeus continuaram a arrematar a cobrança dos impostos e a praticar actos, que o povo reputava vexatorios e expoliadores (4).

Tal ostentação fizeram das suas riquezas os judeus, no reinado de D. Affonso v, que podemos considerar ahi o ponto de partida para represalias gravissimas, verdadeiramente demolidoras do poder dos judeus em Portugal.

Essa ostentação e as liberdades, de que faziam gala, começaram por exacerbar os odios do povo, manifestados bem evidentemente nos assaltos e tumultos, que occorreram contra a judiaria de Lisboa, em 1449.

---

(1) *Ordenações Affonsinas*, l. 2.º, tit. LXXXII.

(2) *Archivo da Camara Municipal do Porto*, Pergaminhos, l. II; Livro Grande, fol. 48, col. 1.ª e 2.ª

(3) *Ordenações Affonsinas*, l. 2.º, tit. LXXV.

(4) A. Herculano, *Historia e origem do estabelecimento da inquisição*, t. 1.º, pag. 85.

A aversão contra os judeus adquiria, dia a dia, maior intensidade ([1]), como claramente se denuncia nas actas das côrtes convocadas durante a segunda metade do seculo XV, pelas quaes se reconhece que a linguagem dos procuradores das cidades e villas representava a expressão do pensar e do sentir «não só do vulgo, mas tambem da burguezia christã».

Não tardaram, portanto, as restrições ás vantagens e liberdades, de que os judeus gosavam. Nas côrtes de Coimbra, em 1473, prohibiu-se-lhes que comprassem quaesquer bens de raiz para dotarem e apropriarem ás synagogas ([2]), etc.

Continuaram no reinado de D. João II os queixumes e protestos contra os judeus, preparando-se por esta forma a tragedia dolorosa, que bem depressa se desenrolou.

O monarcha demonstrára, desde os principios do seu reinado, pronunciada predilecção pelos judeus, porque reconhecera n'elles homens distinctos pela sciencia, especialmente na astronomia, nos quaes poderia achar auxiliares poderosos para a realisação das suas largas ambições de novas descobertas e novas conquistas.

João Peres da Covilhã e Affonso de Paiva, mandados por terra para descobrir meio de tentar a navegação ao longo da costa africana, levaram cartas geographicas feitas pelo astronomo notabilissimo MARTIM BEHAIM e pelos judeus mestre Rodrigo e mestre José, medicos do monarcha ([3]).

A despeito da protecção do rei, a situação dos judeus em Portugal aggravou-se. Em 1482, a judiaria de Lisboa foi saqueada pelo povo. Os judeus vindos de Castella eram acoimados de causadores da peste; a censura do Porto, seguindo o exemplo da de Lisboa, dispoz que nenhum judeu vindo de Espanha entrasse na cidade ([4]), sendo, todavia, essa medida invalidada por D. João II.

Promulgado pelos reis catholicos de Espanha, Fernando e Izabel, o decreto de 31 de março de 1492, que obrigou os judeus a procurarem nova patria, muitos voltaram-se para Portugal

---

([1]) A. HERCULANO, *Historia da origem e estabelecimento da inquisição em Portugal*, t. 1.º, pag. 193.
([2]) V. de Santarem, *Historia e theoria das côrtes*, t. 1.º, pag. 24.
([3]) J. DE BARROS, Decadas, l. IV, pag. 64.
([4]) *Archivo Municipal do Porto*, Livro verde, anno 1485, fol. 9.

e D. João viu na admissão d'elles uma boa fonte de receita, para poder realisar o seu sonhado plano de conquistas em Africa.

Impoz que cada um d'elles devia pagar oito cruzados «pagos em quatro pagas» ([1]), exceptuando totalmente as creanças de peito e, em parte, os officiaes mechanicos (ferreiros, latoeiros, malheiros, armeiros) que, ficando no reino, só pagariam metade. O livre transito e entrada em Portugal era sómente por oito mezes e D. João obrigou-se a dar-lhes navios para os transportar aonde elles quizessem.

Alexandre Herculano diz que, elevando-se a perto de 800:000 a emigração dos judeus para Portugal, não seria calculo exaggerado suppòr que um terço d'esse numero transpoz a fronteira ([2]). E com esses emigrantes veio uma somma consideravel de dinheiro, de que D. João II soffregamente tomou conta para a consecução da conquista de Africa, sonho que não realisou, apparecendo junto, depois da sua morte, esse dinheiro ([3]). Note-se, porém, que muitos judeus transpozeram clandestinamente a fronteira portugueza, para se esquivarem ao pesado imposto, a despeito dos perigos pelos caminhos, que eram obrigados a percorrer.

Mas não bastou aos judeus a capitação de oito cruzados para lhes abrir a hospitalidade portugueza; como se aproximava o praso fatal dos oito mezes concedidos, tiveram de offerecer aos officiaes encarregados das contravenções quinze mil cruzados, que foram logo acceites e ainda por cima D. João II intendeu que bastava transportal-os a Tanger e Arzilla, aonde chegavam nas mais desgraçadas condições!

E tal era a fama das riquezas dos judeus, que, tendo-se espalhado que elles haviam devorado o ouro, quando pelo edicto de Fernando e Izabel lhes fôra prohibida a sahida dos metaes

---

([1]) Damião de Goes, *Chronica de D. Manuel*, pag. 1 a 10.

([2]) Alexandre Herculano, *Historia da origem e estabelecimento da inquisição*, t. 1.º, pag. 102.

([3]) «... el-Rey ouue hũa grande soma de dinheyro, do qual nunca despendeo hũa só peça, por que o tinha pera a dita passagem, que com a sua doença não pode fazer e pro sua morte se achou todo o dinheyro junto, assi como o ouue sem faltar nada». Garcia de Rezende, *Chronica de D. João II*, cap. CLXIII.

preciosos, os mouros matavam-os para lhes buscarem nas entranhas as riquezas, que de outro modo não lhes encontravam [1].

As leis espanholas prohibiam aos nobres occuparem-se de qualquer profissão ou industria; prohibiam-lhes até que empregassem os seus capitaes em emprezas industriaes e commerciaes. Por isso, com a expulsão dos judeus, que tratavam exclusivavamente os negocios de dinheiro, entraram em Espanha numerosos estrangeiros a desempenhar a missão, que elles tinham tomado sobre si. Restava para os espanhoes a permuta das suas materias primas com os artefactos do estrangeiro e o seu transporte por mar [2].

Commerciantes e fabricantes não eram considerados em Espanha, nem eram admittidos a occupar cargos administrativos. Como os enviados ás côrtes eram eleitos pelas corporações municipaes, segue-se que nem o commercio nem a industria tinham representação em côrtes [3].

Prosigamos na historia das perseguições aos judeus, as quaes iam, a bem dizer, ainda no começo.

D. Manuel mantinha a predilecção dos seus antecessores pelos judeus, aos quaes começou por conceder carta de alforria, dando-lhes permissão de se estabelecerem onde quizessem [4]; mas bem depressa teve de submetter-se aos mandos da sua ambição e ao imperio da voz do coração.

Effectivamente, para realisar o sonho de subir ao throno de Espanha, concebeu o plano de casamento com D. Izabel, filha mais velha dos reis catholicos; mas esta, induzida, sem duvida, pelos paes, propoz-lhe o adiamento do casamento, até completa expulsão dos judeus de Portugal, e no contracto nupcial, lavrado em 1497, ficou exarada a clausula expressa da expulsão dos judeus.

Forte era a corrente, que se levantava a favor dos judeus, porque poderosos motivos de ordem politica, economica, social e

---

(1) A. Herculano, *Historia da inquisição*, t. 1.º, pag. 106.

(2) K. Haebler, *Die wirtschaftliche Blüte Spaniens in 16 Jahrhundert*, pag. 45 e 51.

(3) K. Haebler, op. cit., pag. 61.

(4) «El-Rey D. Emanuel . . . tanto que regnou libertou logo estes judeus cativos, sem delles, nem das communas dos judeus naturaes do Reyno querer acceptar hũ grande serviço. . .». Damião de Goes, *Chronica de D. Manuel*, cap. X, pag. 21.

religiosa recommendavam a permanencia d'elles em Portugal. A propria Espanha reconheceu o erro que praticára; mas era tarde para o remediar ([1]). Não se esquecia que os judeus reuniam variadas aptidões, sobretudo para as artes mechanicas, e que possuiam riquezas valiosissimas; ponderava-se tambem que, se elles fossem coagidos a acolher-se entre os mouros, levariam, sem duvida, a estes os seus bens, e, sobretudo, os seus segredos, alguns dos quaes bem preciosos.

Em todo o caso, predominou o grito da expulsão, a qual foi decretada a 5 de dezembro de 1496 ([2]).

Dez mezes foram concedidos para escolherem entre a sahida do reino e a morte: «sob pena de morte natural e perder as fazendas para quem os acusar» ([3]). E essa resolução foi aggravada com a ordem para se tirarem aos judeus, que partissem, os filhos menores de 14 annos, a fim de serem baptisados e doutrinados na fé catholica. O que se passou em todo o reino, por virtude d'essa ordem, mal póde imaginar-se; o amor paternal explosiu em assomos de furia, de bravura e de desesperação. O rei levava por diante o seu plano funesto, fechando os ouvidos aos melhores conselheiros: «não me importo de razões, não curo do direito!» — exclamava elle em Extremoz.

Bem depressa se manifestaram as consequencias do erro praticado; o rei pretendeu atalhar a essas consequencias por varias formas, começando por conceder largos privilegios aos judeus; mas estes, desconfiados das palavras do monarcha, aproveitaram o ensejo para pôrem a salvo as suas pessoas e bens; os mais abastados vendiam as suas propriedades aos christãos e convertiam o producto da venda em letras de cambio sobre praças estrangeiras.

Quiz-se pôr um dique a esse exodo de capitaes; mas baldados foram os esforços, apesar da ameaça da perda de todas as fazendas e bens moveis e de raiz, onde quer que fossem achados e da nau ou naus e navios, que os levassem.

([1]) «Na verdade, parece que a Hespanha conheceu o erro, que tinha commettido em expulsar do seu seio uma raça laboriosa e possuidora de grandes riquezas; mas o passo estava dado e então só restava anniquilar as vantagens que Portugal poderia tirar da falsa politica dos reis de Castella». *Panorama,* t. 1.º

([2]) Damião de Goes, *Chronica de D. Manuel,* cap. XVIII.

([3]) *Ord. Man.,* liv. 2.º, tit. XLI.

Campeou infrene a usura, no seculo xv, e vamos encontrar gente de elevada stirpe desempenhando as funcções de prestamista e penhorista. O dr. SOUSA VITERBO dá minuciosa informação a tal respeito n'um curioso opusculo. Apresenta-nos, em primeiro lugar, D. Guiomar de Castro, avó materna de Affonso de Albuquerque, em cuja casa as mais gradas pessoas, incluindo o rei e os principes, iam depositar os seus penhores (1), sendo-lhe concedidos privilegios especiaes para a liquidação de dividas. Menciona o erudito escriptor estar persuadido de que D. Affonso v destinára ao apresto de algumas das armadas, que foram á conquista dos lugares da Africa, as 8:000 dobras, de que ainda no anno de 1471 restavam por satisfazer 6:286 ½ e 190 reaes brancos.

Não estava D. Guiomar só em campo, como prestamista; entre as pessoas, que lhe faziam concorrencia, contava-se a condessa de Loulé, a qual emprestou ao bispo de Evora D. Julio, ouro, prata e dinheiro para os gastos de uma esquadra de soccorro, que o mesmo bispo commandou, armada por D. Affonso v, para uma nova cruzada, a pedido do papa Sixto v (2).

Outro prestamista notavel foi D. Duarte de Menezes, que emprestou ao infante D. Henrique a somma de 6:000 dobras de ouro, garantidas com certas propriedades, por sua morte. Vem a proposito mencionar que para os gastos de Ceuta pedira o infante D. Henrique de emprestimo ao conde de Arrayolos a quantia de 2.251:776 reaes brancos (3).

Não deve passar sem registro que os italianos, especialmente os genovezes e os florentinos, não só tomaram parte activa na nossa navegação e commercio, como contribuiram para o desenvolvimento da industria. N'um outro valioso opusculo sobre o monopolio da cortiça no seculo xv, diz o dr. SOUSA VITERBO: «Estou convencido de que os italianos residentes em Lisboa, mareantes, mercadores, banqueiros, armadores, contribuiram muito, por intermedio das suas relações com as praças da Italia e da Europa, para divulgar os progressos dos nossos descobrimentos maritimos» (4).

---

(1) SOUSA VITERBO, *A avó materna de Affonso de Albuquerque — Os penhoristas do seculo* XV, pag. 8.

(2) Idem, pag. 10.

(3) Idem, pag. 11.

(4) SOUSA VITERBO, *O monopolio da cortiça no seculo* XV, pag. 9.

Portugal era então o receptaculo de riquezas sem conta. Abundava o dinheiro; Lisboa era o emporio do commercio. Affirma Damião de Goes que muitas vezes via na casa da contractação da India mercadores com sacos cheios de dinheiro em ouro e em prata, para fazerem pagamento do que deviam, o qual dinheiro lhes diziam os officiaes que tornassem o outro dia, por não haver tempo de o contar ([1]).

Os navios da India chegavam constantemente ao Tejo carregados de preciosidades.

«Era o arroz e a pimenta e as mais especiarias, o cravo das Molucas, a noz e a massa de Banda, o gengibre de Kallam, a canella de Sinhala; era o marfim da Guiné, as sedas da China e os tapetes da Persia, o ambar das ilhas Malaias, o sandalo de Timor, as tecas e couros de Katschhi, o anil de Kambai, o pau de Solor, as cambraias de Bengala; eram o ebano, o borax, a camphora, a laca, a cera, o almiscar de Ormuz. Além d'isto, Sofala e Sumatra mandavam o ouro e a prata, o Japão e o Manaar as perolas, que tambem vinham de Kalckar; o Pegu os rubís e toda a India os diamantes. De Ormuz recebiam-se os cavallos da Arabia e da Persia» ([2]).

Com a descoberta do caminho maritimo para a India conseguiu Portugal haver ás mãos o monopolio do commercio das especiarias, submergindo sob a sua supremacia o commercio indo-egypcio e dispondo do tracto das especiarias com as nações do norte da Europa, paizes de Flandres, Inglaterra, etc. ([3]).

Assim cavou a ruina do commercio de Veneza, até ahi omnipotente. Machiavelli escrevia de Veneza para Florença: «Os preços das especiarias armazenadas no Adria cahiram para menos de metade».

Era consideravel, incalculavel mesmo, o trafico importantissimo, que as cidades italianas faziam antes das nossas conquistas. A receita de Florença era calculada em mais do que o rendimento total da Inglaterra e Irlanda juntas ([4]).

Foram verdadeiramente collossaes as sommas desviadas de

([1]) Damião de Goes, *Chronica de D. Manuel*.
([2]) Oliveira Martins, *Historia de Portugal*, t. 2.º, pag. 24.
([3]) Heyd, *Geschichte des Levantehandels in Mittelalter*, 3.º periodo, n.º 10.
([4]) J. de Vasconcellos, *A Renascença portugueza*, pag. 7.

Veneza para Lisboa. Não é para admirar, pois, que a republica de Veneza propozesse, como propoz, a D. Manuel um contracto para a compra *de todas as especiarias* chegadas das Indias a Lisboa, depois de satisfeito o consumo nacional.

Ao mesmo tempo, a feitoria portugueza de Flandres, verdadeira escola da diplomacia, avançava em importancia. Em 1488, o feitor de Portugal, Diogo Fernandes, servia de intermediario a Maximiano da Austria, que sollicitava de D. João II os seus bons officios para a paz com o rei de França. O principe portuguez offerecia, logo depois, 100:000 ducados de ouro para resgatar o seu illustre parente do captiveiro de Bruges (1).

Seculo XVI

Somos chegados ao tempo em que verdadeiramente se realisou a concentração capitalista.

Comecemos por examinar o movimento dos negocios em Portugal, no começo do seculo XVI.

Sobre esta interessante materia, offerece-nos preciosos dados Konrad Haebler no seu livro *Die Geschichte der Fugger'schen Handlung in Spanien*.

Em 13 de fevereiro de 1503 assignava D. Manuel um tratado pelo qual era concedida auctorisação a varios commerciantes allemães para estabelecerem feitorias em Lisboa. N'um appendice a esse tratado, ampliavam-se as concessões n'elle contidas a todos os commerciantes estrangeiros, que estabelecessem em Portugal uma feitoria, com, pelo menos, 25 ducados de capital. Entre os primeiros, que se aproveitaram d'essa concessão, contam-se os Fuggers, que, em 1504, enviavam a Lisboa o seu primeiro feitor, Marcos Zimmermann.

N'esse anno, a 1 de agosto, concluia Lucas Rem, feitor da casa Welser, de Augsburg, um tratado com D. Manuel, pelo qual lhe era concedida participação no commercio directo com as Indias, podendo expedir na frota, que seguia então para o Oriente, um commissario seu e generos para a permuta.

A mesma concessão havia já sido feita aos italianos Bartolomeo

(1) J. de Vasconcellos, *A feitoria de Portugal em Flandres* (1885).

Marchione, de Florença, e Antonio Sabrago, Francesco Carducci e outros. Na frota, que partiu em 1505, os negociantes italianos tinham participação de 30:000 cruzados (a 400 réis, isto é, um pouco mais do que um ducado); os Welser tinham entrado com 20:000 ducados; os Fuggers e outros tinham participação no valor de 16:000 cruzados. Foi por esta primeira frota que os Fuggers mandaram o seu representante para Portugal.

Lisboa tornou-se um emporio commercial de tal grandeza, que, como vimos já, a republica de Veneza propoz a D. Manuel um contracto para a compra de todas as especiarias chegadas das Indias, excedentes do consumo de Portugal. Em 1522, assignou-se esse contracto; mas foi baldado, porque a lei natural do progresso zombou do ouro e do contracto. Veneza cahiu ([1]).

Passado algum tempo, foi decretado por D. Manuel que toda a pimenta vinda das Indias devia entrar na alfandega de Lisboa e d'ahi seria vendida aos compradores. Cessou, assim, a participação dos estrangeiros nas frotas da India.

Constituiu-se, mais tarde, o monopolio da venda das especiarias, monopolio que foi frequentes vezes administrado por allemães, genovezes e florentinos.

Os negocios dos commerciantes allemães em Lisboa consistiam, sobretudo, na compra de especiarias e na venda de cereaes, bem como de madeiras, cobre e outros artigos indispensaveis para o armamento dos navios destinados á derrota das Indias ([2]).

A feitoria de Flandres foi a primeira e a melhor eschola da diplomacia portugueza no seculo XVI, observa o sr. JOAQUIM DE VASCONCELLOS. «Quem a julgar uma mera agencia commercial, onde se tratava só da venda das preciosas especiarias do Oriente, do negocio da canella, do cravo e da pimenta, engana-se deveras» ([3]).

Portugal tinha razões para se ufanar da feitoria de Flandres; essa feitoria e as suas agencias foram franqueadas aos homens

---

([1]) «Vide o que GOES diz d'estas tentativas dos venezianos (*Chronica*, IV, pag. 631) e da missão de Alessandro di Pesaro a Lisboa. GOES ignorava que o contracto se ultimou, falta que fomos encontrar em *Kiesselbach*, pag. 380» — *apud* J. DE VASCONCELLOS, *Renascença portugueza*, pag. 10.

([2]) HAEBLER, *Die Geschichte der Fugger'schen Handlung in Spanien*, pagg. 23 e 24.

([3]) J. DE VASCONCELLOS, *A feitoria ds Portugal em Flandres* (1885).

mais illustres da renascença, protegendo efficazmente as sciencias, as lettras e as artes. Um simples feitor, observa o sr. JOAQUIM DE VASCONCELLOS, ajudado apenas por um ou dois escrivães e com meios relativamente modestos, fez então mais, em beneficio do nome portuguez, do que embaixadas opulentissimas.

Curta foi a gloria da feitoria. Em fins de 1532, Lourenço Lopes, feitor de Flandres, escrevia de Antuerpia ao secretario do rei, Antonio Carneiro, expondo o apuro em que estava, por não poder pagar o que por lá se devia, a ponto de o fazerem jurar em juizo, que não sahiria de Flandres sem pagar ([1]).

Os feitores portuguezes subiram o Rheno, desde Colonia até Bosel, e desceram o Danubio, desde Ulm até Regensburg, para penetrarem na Italia pela via antiga de Brenner e valle de Adige (Insbruck, Brixen, Botzen, Trento, Verona). Ao lado d'estas tres estradas achavam-se os centros commerciaes e artisticos mais importantes da Idade Media e da Renascença, alimentados pelas duas grandes arterias fluviaes, que faziam affluir ao coração da Europa as riquezas do Occidente e do Oriente ([2]).

As vias fluviaes tinham como ponto de partida Antuerpia; a via maritima abria-nos os portos hanseáticos do Mar do Norte (Hamburgo) e do Baltico (Lubeck, Dantzig); o Elba abria-nos o caminho da Bohemia até Prag, um dos centros mais importantes dos seculos XIII e XIV. A Wistula levava o mercador a Warsovia e Cracovia. Em todos esses pontos encontravam-se feitorias e agentes portuguezes.

Tal riqueza commercial adquiriu Antuerpia, que a sua população quadriplicou em setenta annos. Os portuguezes figuravam entre os 2:500 navios que povoavam, em certos dias, aquelle porto; figuravam tambem na sua grandiosa Bolsa; tinhamos a nossa percentagem nos 500 milhões de coroas de prata, que a tanto montava a circulação total do commercio de Antuerpia. Os portuguezes eram, nos tres primeiros decennios de 1500-1530, os negociantes estrangeiros mais considerados em Antuerpia; tudo o que alli havia de notabilidades commerciaes estava em maior ou menor dependencia dos feitores de Portugal.

---

(1) *Corpo chronologico da Torre do Tombo*, cit. por J. DE VASCONCELLOS.
(2) J. DE VASCONCELLOS, *Renascença portugueza*. Estudos sobre as relações artisticas de Portugal nos seculos XV e XVI, pagg. XV e XVI.

A forma por que o governo portuguez contractava com os negociantes estrangeiros os fornecimentos de que carecia era, em geral, baseada na concessão de uma receita, durante um certo numero de annos, attingindo essa concessão quasi as condições de um monopolio.

Um dos artigos mais importantes d'estas transacções era o cobre, do qual os Fuggers tinham quasi o monopolio na Europa e do qual eram precisas grandes quantidades para a construcção dos navios das frotas portuguezes ([1]).

Á casa Fugger foi proposto por D. Manuel o fornecimento, por um certo numero de annos, de todos os navios de que o rei carecesse para a navegação das Indias. Esses navios deviam vir promptos dos portos allemães e construidos de novo. Em compensação, aos Fuggers seria reconhecido o direito de participação no commercio colonial, cuja exploração pertencia então aos chamados *contractadores* do monopolio. Não chegou, porém, a realisar-se esse plano ([2]).

Em virtude da monopolisação do commercio das Indias e em consequencia da decadencia dos negocios coloniaes, os Fuggers acabaram, em 1558, com a feitoria de Lisboa e passaram a dirigir os negocios de Portugal na sua filial de Sevilha.

Em 1576, tinham como representante, em Lisboa, João Henriques, hollandez, de origem portugueza. Tambem foi agente dos Fuggers em Portugal Damião de Goes.

Um negociante de Augsburg, Conrad Rott, foi *contractador* do monopolio da pimenta, em 1577.

O governo portuguez tinha passado aos seus credores titulos de divida, similhantes aos *juros* espanhoes, que se tinham tornado papeis de especulação; eram negociados a preços variaveis e cotados, por vezes, a 40 e 45 por cento. Estes titulos eram usados para pagamento das dividas pelo valor nominal.

Em 1557, os Fuggers estavam de posse de titulos da divida portugueza no valor de 15 $1/2$ contos (40:000 ducados) ([3]).

Os Fuggers occupavam-se tambem do commercio de pedras preciosas.

([1]) Haebler, *Op. cit.*, pag. 32.
([2]) Haebler, *Op. cit.*, pag. 36.
([3]) Haebler, *Op. cit.* pag. 40.

É curioso lançar, ainda que passageiramente, a vista sobre as finanças espanholas, após o primeiro quartel do seculo XVI. Em 1527, Carlos V cedeu aos genovezes certos impostos e concedeu-lhes licença de estabelecerem bancos em Medina, Villalon e Rioseco. Tendo Filippe II decretado, em 1575, que cessasse a obrigação de satisfazer aos credores estrangeiros os pagamentos devidos, isto abalou por tal forma o credito de Espanha, que o rei teve a maior difficuldade em encontrar quem lhe descontasse uma lettra em Flandres. As medidas tendentes a crear difficuldades e a extorquir aos estrangeiros a sua posição de financeiros em Espanha eram, porém, tão populares e tão agradaveis á nação, que ella se submettia bem aos inconvenientes resultantes de similhantes medidas.

Não podendo obter dinheiro dos banqueiros estrangeiros, Filippe II levantava nos pequenos banqueiros e negociantes espanhoes sommas destinadas a pagamentos nas grandes feiras, como, por exemplo, a de Medina. Chegada a occasião dos pagamentos n'essas feiras, como o erario real não podia fazer esses pagamentos, eram estes adiados para as feiras seguintes. D'ahi resultava grande incerteza e difficuldade geral nos negocios, que, juntamente com o augmento dos impostos, contribuiu para a rapida ruina da industria e do commercio espanhol [1].

Nos meiados do seculo XVI eram os genovezes os banqueiros da corte de Espanha e recebiam, além do lucro importantissimo das transacções, extraordinarios privilegios. Tinham liberdade de exercer a sua profissão de banqueiros em Espanha, apesar da lei que prohibia aos estrangeiros esse mister; eram eleitos para presidentes das principaes bolsas espanholas; era-lhes concedida a consignação do rendimento de certos impostos, tendo ainda o direito de os cobrar.

A par dos genovezes, eram os Fuggers *(Fucars)* de Augsburg que, desde 1525, tomavam logar importantissimo entre os banqueiros da corte de Espanha. N'esse anno, foram-lhes arrendados os *maestrazgos* das Ordens de Calatrava, Santiago e Alcantara, incluindo as minas de mercurio de Almodovar e de prata de Guadalcanal. Com essa concessão ficaram os Fuggers sendo se-

---

[1] HAEBLER, *Die wirtschaftliche Blute Spaniens im 16 Jahrhundert*, pag. 72.

nhores do monopolio do mercurio, importantissimo para a exploração das minas de prata do Mexico.

Nas côrtes de 1542, apontou-se que os genovezes estavam, de facto, na posse de monopolios no commercio das lãs, sedas, ferro, aço e viveres.

As guerras de Filippe II obrigavam a novas condescendencias com os banqueiros estrangeiros, que multiplicavam as suas exigencias. Sancho de Moncada calcula que sahissem de Espanha annualmente, ganhos por estrangeiros, cerca de 20 milhões de ducados de linhos, artigos de luxo, peixe, marmore, madeiras, etc.

Mais uma vez, temos de fallar dos judeus.

Continuava feroz, em Espanha, a obra sanguinaria da Inquisição; em Lisboa lavrava a peste, fazendo mortandade horrivel.

O fanatismo exacerbava o odio contra os judeus; havia sêde de sangue. No dia 9 de abril de 1506, um incidente occorrido na igreja de S. Domingos produziu a faisca, da qual se originou uma horrivel carnificina, que durou dois dias, porque ao terceiro, diz Damião de Goes, «já não achavam quem matar».

E assim se completou a obra de exclusão dos judeus de Portugal, obra que ficou assignalada na nossa historia por imperecíveis laivos de sangue e na economia do paiz por innumeraveis prejuizos, de variada especie.

Á Hollanda, especialmente, foram levar as luzes do seu espirito e as riquezas da sua actividade; alli tiveram sempre uma posição saliente e alli conservaram, até ao principio do seculo XIX, o proprio uso da lingua portugueza.

Portugal, fascinado apenas pelos reflexos do ouro, não comprehendeu quanto essa riqueza tem de passageira e quanto mais solida é a que se funda no trabalho e no fomento da riqueza nacional.

Com a expulsão dos judeus coincidiu uma desorganisação administrativa, que conduziu á extrema decadencia as finanças nacionaes, multiplicando-se assombrosamente a divida publica.

«As coisas haviam chegado a termos, ainda antes de 1542, escreve Herculano, que as pessoas sisudas e experientes quasi de todo desanimavam. Nunca de memoria de homens tinha sido tão profunda a desorganisação da fazenda publica» [1].

---

[1] A. Herculano, *Historia da origem e estabelecimento da inquisição em Portugal,* t. 2.º, pag. 30.

Provocaram-se represalias de outras nações; d'ahi nasceu a desconfiança, que se reflectiu profundamente nos negocios em Portugal.

É certo, porém que, quando se deu o immenso revez de Alcacer-Quibir, quasi todas as casas illustres estavam pobres e a necessidade de aggravar os sacrificios feitos com os enormes gastos exigidos pelo resgate dos que gemiam em ferros, veiu esgotar os ultimos recursos.

A antiquissima instituição dos morgados favorecia a organisação da propriedade capitalista no seculo XVI.

Nas côrtes de Madrid, do anno de 1534 assentava-se «serem os morgados interessantes e uteis ao Estado, dignos de todo o favor» [1].

Esse parecer foi abraçado pelo legislador na nossa *Ordenação Filippina* (a *Affonsina* e a *Manuelina* não legislaram sobre morgados) onde se diz:

«A tenção dos grandes e fidalgos e pessoas nobres dos nossos reinos e senhorios, que instituem morgados de seus bens e os vinculam para andarem em seus filhos e descendentes... é para conservação e memoria do seu nome e accrescentamento dos seus Estados, casas e nobrezas e para que em todo o tempo se saiba a antiga linhagem d'onde procedem e os bons serviços que fizeram aos reis nossos predecessores e pelos quaes mereceram d'elles serem honrados e accrescentados, do que resulta grande proveito a estes reinos, para que n'elles hajam muitas casas e morgados, para melhor defensão e conservação dos ditos reinos e nos poderem os possuidores d'elles com mais facilidade servir e aos reis, que pelo tempo em diante nos succederem na coroa d'estes reinos» [2].

Lavrava uma geral mania de instituir vinculos em predios de ridiculos rendimentos, «em que, se não enchiam os fins, pelos quaes eram, apesar dos contrarios prejuizos com outra contrabalançada utilidade publica, que de taes insignificantes morgados não podiam resultar» [3].

Para obstar a esses erros foi promulgada uma lei em 1770, como adiante se verá.

---

(1) Lv. 7.ª, tom. 7.º, liv. 5.º
(2) *Ord. Filip.*, liv. IV, tit. 100, § 5.º
(3) Souza de Lobão, *Tratado pratico de morgados*, pag. 25.

Offerece-se-nos considerar ainda uma nova entidade — a companhia de Jesus.

D. João III e D. Sebastião, especialmente, além da sua munificencia em dotar e engrandecer os jesuitas, tinham sido igualmente prodigos com outros religiosos, calculando alguns escriptores em tresentos e cincoenta os conventos de ambos os sexos fundados de novo desde D. Affonso V e sustentados a expensas dos bens da coroa e dos particulares e das rendas dos anniversarios, capellas e padroados.

Quem percorre os valiosos *Documentos para a historia dos jesuitas em Portugal*, colligidos pelo dr. ANTONIO JOSÉ TEIXEIRA, tem occasião de observar as concessões feitas á companhia de Jesus.

Eram dispensados de pagar aluguer algum das casas da Universidade, em que poisavam; podiam trazer lenha da mata de Botão; foi-lhes licito vedar um caminho, da porta do castello de Coimbra para a parte nova «sem embargo de quaesquer leis, ordenações ou posturas da camara da dita cidade, em contrario» (1); mandou-se expropriar casas para desobstruir o terreno destinado á construcção do collegio (2); permittiu-se que os jesuitas mandassem comprar em qualquer parte e levar para Coimbra todo o trigo, cevada, centeio, milho e quaesquer outros mantimentos e coisas de que tivessem necessidade (3); facultando os olivaes de Coimbra e outros para nelles poderem pastar até tresentos carneiros, sem pagarem coima nem pena alguma, mas apenas o damno e perda que fizessem (4).

Foram valiosissimos os privilegios outhorgados aos jesuitas. D. João III concedeu-lhes que «tenham, gosem e usem d'aqui em diante de todos os privilegios, liberdades, graças e franquezas, que de mim teem, e de que usam, e ao diante pudérem gosar e usar, os lentes e deputados e conselheiros da Universidade da dita cidade de Coimbra» (5). Foi concedido que as rendas do collegio dos jesuitas se arrecadassem e executassem pela

(1) ANTONIO JOSÉ TEIXEIRA, *Documentos para a historia dos jesuitas em Portugal*, pag. 127.
(2) A. J. TEIXEIRA, *Op. cit.*, pag. 137.
(3) A. J. TEIXEIRA, *Op. cit.*, pag. 149.
(4) A. J. TEIXEIRA, *Ob. cit.*, pag. 161.
(5) A. J. TEIKEIRA, *Ob. cit.*, pag. 169.

forma por que os almoxarifes e recebedores arrecadavam e executavam as dividas da fazenda real ([1]). Não faltou a concessão de terras. Por Filippe I foi confirmada a carta de D. Henrique isentando as casas e collegios da companhia de Jesus de ciza dos bens de raiz, que «comprarem e venderem, ou escambarem, e as partes com quem as ditas compras ou escambos fizessem, pagariam sua meia ciza, se a devessem, e bem assim que não pagassem ciza do pão, vinho, azeite, carnes, pescado, bestas nem de qualquer outro movel, que comprassam, vendessem ou escambassem que fossem para meneio e uso do collegio, nem a pagassem as partes, que estas cousas vendessem, comprassem ou com quem as escambassem» ([2]).

Igualmente foram os jesuitas isentos de pagar dizimas das suas propriedades, que elles por si e seus familiares e ás suas proprias custas grangeassem e, grangeando-as por lavradores parciarios, eram isentos da parte que levassem por via de conta ([3]).

Taes e tantos privilegios não vinham aos jesuitas apenas dos reis; provinham-lhes tambem dos bispos.

Concessão de elevado alcance foi a que D. Sebastião fez, mandando unir e incorporar os collegios das Artes e de Jesus á Universidade de Coimbra e que os reitores, padres e collegiaes d'elles e seus criados, familiares e pessoas, que os servissem e d'elles tivessem mantimento e ordenado gosassem e usassem os privilegios, liberdades, graças e franquezas outhorgadas á Universidade ([4]).

Ponhamos de parte os privilegios de caracter scientifico, por não interessarem directamente ao estudo que fazemos, bastando dizer que mais de um alvará regio obrigou a Universidade a reconhecer as habilitações adquiridas nos institutos dos jesuitas.

As doações feitas foram muito valiosas: consistiam em terras, agua, dinheiros, assucar e outros generos e até especiarias e incenso da casa da India, não faltando «um escravo para serviço do dito collegio, de que faço esmola» ([5]) bem como livrarias, pannos de armar, etc.

([1]) A. J. Teixeira, *Ob. cit.*, pag. 176.
([2]) A. J. Teixeira, *Ob. cit.*, pag. 184.
([3]) A. J. Teixeira, *Ob. cit.*, pag. 187.
([4]) A. J. Teixeira, *Ob. cit.*, pag. 198.
([5]) A. J. Teixeira, *Ob. cit.*, pag. 263.

Com tantos e tão valiosos elementos, não é para admirar que os jesuitas se engrandecessem em importancia e bens, conquistando uma influencia consideravel na sociedade portugueza, principalmente na segunda metade do seculo XVI e na primeira metade do seculo XVII.

(Continúa).

BIBLIOGRAPHIA

Visite de Sa Majesté Charles 1.er, Roi de Portugal et des Algarves, et de M. de Président de la République française au Muséum National d'Histoire naturelle le 24 novembre 1905. Paris, MDCCCCVI.

É bem sabido pelos leitores d'esta revista que, quando, no fim do anno passado, S. M. El-Rei o Senhor D. Carlos visitou em Paris o Senhor Presidente da Republica franceza, das solemnidades e festas que foram celebradas em sua honra fez parte uma sessão no Museu de Historia natural d'aquella capital, a que concorreu o que em França existe de mais elevado na politica, nas sciencias, nas lettras, etc. O governo francez, conhecendo que coisa alguma poderia ser mais agradavel a um rei que consagra ao estudo das sciencias naturaes muito do tempo que lhe fica livre das suas altas funcções, do que ver-se cercado dos principes da sciencia franceza, n'essa casa celebre na historia das sciencias physico-naturaes, e ouvir da boca de alguns dos mais eminentes a narração das suas mais brilhantes descobertas, incluiu muito judiciosamente esta sessão no programma das solemnidades realisadas em honra do chefe da nação portugueza. Foi uma sessão memoravel esta, que ficará inscripta na chronica do nosso actual monarcha entre os acontecimentos mais notaveis do seu reinado.

O livro cujo titulo antecede esta noticia contém os discursos e conferencias pronunciadas n'essa occasião. Abre por uma elequente allocução do director do Museu, M. Ed. Perrier, em que sauda o monarcha portuguez e em que se refere aos trabalhos scientificos do Senhor D. Carlos com louvores a que dá grande valor a auctoridade do naturalista eminente que os exprimiu.

Vem depois o bello discurso pronunciado pelo rei de Portugal, em resposta á allocução precedente, na qual este em termos ca-

lorosos e em phrases expressivas agradece a recepção que se lhe está fazendo e sauda os homens eminentes que são a gloria do grande estabelecimento scientifico que veio visitar.

Seguem-se as cinco conferencias que foram feitas n'essa occasião por M.me Curie e por MM. H. Becquerel, Lippmann, Lacroix e Moissan. São todas curtas, mas extremamente instructivas e vivamente interessantes; e foram quasi todas acompanhadas de experiencias, ou de observações de resultados colhidos em experiencias anteriores, relativas aos phenomenos a que ellas se referem.

Abriu esta série de conferencias H. Becquerel, herdeiro de um grande nome, que, continuando os trabalhos de seu illustre pae sobre a phosphorescencia, descobriu os raios cathodicos, que constituem o assumpto sobre o qual fallou.

A segunda conferencia foi feita pela esposa e collaboradora de Curie, o physico eminente cuja morte prematura e inesperada, em tragicas circunstancias, deploram os homens de sciencia de todo o mundo, a qual se occupou do *radium*, esse corpo maravilhoso que parece destinado a representar um papel importantissimo na sciencia do futuro.

Fallou depois Lippmann, o inventor da photographia das cores, o qual se occupou d'esta importante descoberta.

A quarta conferencia foi feita por Lacroix, o arrojado geologo, que foi estudar á Martinica a desastrosa erupção da montanha Pelé e, quando não tinham ainda terminado os seus effeitos destruidores, o qual se occupou das observações que fez n'esta notavel viagem.

A ultima conferencia foi feita por Moissan, o inventor do forno electrico, que se occupou d'este apparelho utilissimo, que tem dado a solução de muitos problemas importantes de physica.

Esta ultima conferencia é conhecida pelos leitores d'esta revista, porque o eminente chimico que a pronunciou nos deu o prazer de nos confiar o seu manuscripto para ser n'ella publicado.

L. Octavio de Toledo: *Elementos de Aritmetica universal.* (Parte 1.ª). Madrid, 1903.

—— *Tratado de Algebra*, t. I. Madrid, 1905.

A cultura das Mathematicas tem tomado modernamente bas-

tante desonvolvimento em Hespanha, onde téem sido publicadas nos ultimos tempos valiosas obras para o ensino d'estas sciencias, como se pode ver em diversos numeros do *Jornal de Siencias mathematicas*, onde se deu noticia de algumas. Hoje vamos indicar outras, principiando por aquellas cujos titulos vêem de ser escriptos.

A primeira abre por uma curta, mas bem feita, introducção, consagrada ás ideias primordiaes das Sciencias mathematicas, e, em particular, da Arithmetica. Depois são estudadas em vinte e dois capitulos a theoria das operações sobre numeros e sobre polynomios, as regras para o seu calculo, etc.

A theoria geral das operações é nella feita com muito cuidado, o que permitte ao auctor dar toda a clareza e rigor á extensão successiva da noção de numero, na passagem do inteiro para o fraccionario, do positivo para o negativo, do racional para o irracional, do real para o imaginario.

O segundo dos volumes mencionados é o primeiro de uma obra em que o auctor pretende expôr com desenvolvimento as theorias classicas da Algebra. N'elle occupa-se o sabio professor da Universidade de Madrid da parte elementar d'esta sciencia, estudando primeiramente, em uma introducção, a noção de limite e os principios geraes da theoria das funcções e da theoria das equações, depois, no livro primeiro, a doutrina relativa á resolução das equações do primeiro gráo; no segundo, a doutrina relativa á resolução das equações do segundo gráo; e, no terceiro, os principios da theoria das congruencias e da analyse indeterminada. A theoria das equações do primeiro gráo é tratada de um modo mais completo do que é habitual em outras obras d'esta natureza, considerando-se sempre as equações debaixo da sua forma mais geral, o que tem a vantagem de habituar os alumnos ao calculo com quantidades que, por ser o seu numero indeterminado, não podem ser todas escriptas, tendo de a imaginação intervir para trabalhar com as que faltam.

Tanto na primeira como na segunda d'estas obras a exposição é feita com clareza, rigor e elegancia. Porisso não terminaremos esta breve noticia sem exprimir o nosso vivo desejo de que appareça brevemente a segunda parte da primeira e os restantes volumes da outra.

Zoel G. de Galdeano: *Tratado de Analisis matematico.* Zaragoza.

O auctor d'esta obra é um dos mathematicos hespanhoes que mais tem trabalhado para attrair a attenção dos seus compatriotas para o estudo das sciencias mathematicas. Para isso, fundou o primeiro jornal especialmente consagrado a estas sciencias que existiu n'aquelle paiz, escreveu diversas obras para uso dos alumnos que querem apprender os primeiros elementos das referidas sciencias e alguns artigos sobre a philosophia e ensino das mesmas, e anda agora publicando uma obra extensa sobre Analyse mathematica, com o fim de divulgar em Hespanha as doutrinas com que esta parte das mathematicas foi enriquecida por alguns dos mais eminentes geometras do seculo IX.

A obra constará de sete volumes. Os quatro primeiros appareceram em 1904 e 1905, e vamos dar uma noticia resumida dos assumptos que n'elles são considerados.

Entendeu o sr. Galdeano, com muita razão, que, para tornar a leitura da sua obra accessivel ao maior numero possivel de leitores, convinha estudar ligadamente os assumptos de Analyse desde os principios mais elementares até ás questões de natureza um pouco elevada que se téem tornado classicas nos ultimos tempos, e que pretende tornar conhecidas no seu paiz. Por isso consagrou o 1.º volume á exposição da parte do Calculo differencial que se encontra nos manuaes ordinariamente empregados para o estudo elementar d'esta parte das Mathematicas.

O tomo 2.º é consagrado á exposição dos principios geraes da theoria das funcções. Como introducção a esta doutrina é primeiramente estudada a theoria dos numeros irracionaes e a theoria dos numeros complexos com n unidades; depois é considerada a theoria da continuidade e da integrabilidade das funções de variaveis reaes; e finalmente é estudada a theoria das funcções analyticas pelos methodos de Cauchy, Riemann e Weierstrass.

O tomo 3.º abre por uma bella introducção historica sobre o emprego do infinito e do imaginario em Geometria, á qual se segue um interessante capitulo consagrado á Pangeometria. Depois é estudada com bastante desenvolvimento e forma muito moderna a theoria infinitesimal das curvas planas.

O tomo 4.º é consagrado ao Calculo integral e ás suas appli-

cações á theoria geral das funcções, e, em particular, á theoria das funcções eulerianas e das funcções ellipticas.

A esta noticia muito succinta ajuntaremos que esta obra faz parte de uma *Encyclopedia Mathematica*, que o sr. GALDEANO se propõe publicar, e que constará de mais quatro volumes, respectivamente consagrados á theoria dos numeros, á theoria dos grupos de substituições, ás applicações geometricas do calculo infinitesimal e á integração das equações differenciaes.

C. A. LAISANT: *Initiation mathématique*. Paris, 1906.

Os processos que ordinariamente se empregam para o primeiro ensino das mathematicas ás crianças, dando-lhe definições abstractas e regras que ellas decoram sem as comprehender, são mais proprios para as torturar do que para lhes despertar o gosto pelo estudo d'estas sciencias. D'isto nasce a repugnacia prejudicial que muitas d'ellas adquirem contra estas sciencias tão uteis e tão interessantes, e mesmo em muitas, aliás intelligentes, a falsa opinião de que não téem aptidão para o seu estudo.

Para combater este defeito fundamental do ensino, vem o sr. LAISANT de publicar um opusculo precioso e extremamente interessante, onde apresenta um modelo para a iniciação dos estudos mathematicos, por meio do qual se sobe gradualmente por um caminho intuitivo até ás noções abstractas de que é formada esta sciencia, acompanhando a exposição de successivos exemplos muito proprios para interessar as crianças e mesmo para as recrear. Os assumptos considerados são muitos e variados e referem-se aos principios da Arithmetica, da Algebra, da Geometria elementar e da Geometria analytica, e são tratados com uma clareza admiravel e sob uma forma das mais attrahentes. É um livro excellente, que devem ler todos os que téem por missão o primeiro ensino das crianças, e um modelo que devem ter presente aquelles que pretendem escrever livros para o primeiro ensino das mathematicas.

Verhandlungen der dritten internationalen Mathematiker-Congresses in Heidelberg. Leipzig, 1905.

Refere-se este bello e importante volume ao Congresso internacional dos mathematicos que teve logar em Heidelberg em agosto de 1904, e foi publicado sob a direcção do sabio secretario do mesmo Congresso, dr. Krazer, professor na Escola technica superior de Karlsruhe. Contém em primeiro logar a noticia do que n'elle se passou de mais notavel. Depois vem uma conferencia extremamente interessante feita por Königsberger, professor na Universidade de Heidelberg, sobre a vida e a obra scientifica de Jacobi, commemorando por este meio o primeiro centenario do nascimento d'este grande geometra, que teve logar em 1804. A esta conferencia seguem-se tres outras, uma por Painlevé sobre o problema moderno da integração das equações differenciaes, outra por Greenhill sobre a theoria mathematica do movimento do pião, considerada historicamente, outra de Serge sobre a Geometria de hoje e a sua ligação com a Analyse; e depois vêem numerosos trabalhos apresentados ás secções em que se desdobrou o Congresso, sobre diversos pontos importantes das sciencias mathematicas, entre os quaes ha muitos que são firmados por alguns dos geometras mais eminentes do nosso tempo. Contém finalmente o livro uma noticia sobre a exposição de obras e instrumentos mathematicos que teve logar em Heidelberg na occasião do Congresso.

R. Marcolongo: *Meccanica razionale.* Milano, U. Hoepli, 1905.

Em um artigo que publicámos no tomo XV do *Jornal de Sciencias mathematicas* em 1902 dissemos nós, em noticia relativa a uma obra do sr. Marcolongo que continha o curso sobre Mecanica por elle dado na Universidade de Messina, as palavras seguintes: «nota-se n'este livro a boa escolha dos assumptos, a clareza, rigor e simplicidade inexcediveis com que são expostos, a boa ordem em que estão encadeados, e a fórma elegante, moderna e muitas vezes original das demonstrações».

Estas justas palavras são naturalmente applicaveis, e mesmo

com mais razão, á presente obra, consagrada ao mesmo assumpto, que recebeu os melhoramentos sugeridos ao seu sabio auctor por mais continuada experiencia do ensino e mais repetida meditação dos assumptos n'ella tratados.

A obra faz parte da excellente collecção do *Manuali Hoepli*, que veio enriquecer, e é composta de dois volumes.

O primeiro d'estes volumes é consagrado á Cinematica e á Statica. Abre por um capitulo consagrado á Geometria vectorial, da qual o auctor faz muito uso; depois no capitulo 2.° são estudadas as noções de velocidade e acceleração, no capitulo 3.° a theoria dos movimentos finitos dos systemas rigidos, no 4.° e 5.°, respectivamente, a theoria do movimento instantaneo e a do movimento continuo dos mesmos systemas. Segue depois a Statica em tres capitulos, um consagrado á composição das forças, outro ao principio dos trabalhos virtuaes e outro ao equilibrio das curvas funiculares.

O segundo volume é destinado á Dynamica e aos principios da Hidrodynamica. É dividido em sete capitulos, onde são considerados os assumptos seguintes: I As tres leis fundamentaes do movimento. II Problemas particulares do movimento de um ponto. III Principio de d'Alembert e equações geraes da Mecanica. IV Theoremas geraes sobre o movimento de um systema. V Dinamica dos systemas rigidos. VI Attracção das ellipsoides e theoremas geraes sobre a funcção potencial newtoniana. VII Principios da Mecanica dos fluidos.

Acompanham o livro e concorrem para o valorisar numerosos e interessantes exercicios e muitas indicações historicas.

Terminaremos esta rapida noticia com as palavras seguintes, que haviamos escripto em 1902 a respeito da obra a que nos referimos no principio d'ella: «Os professores de Mecanica das nossas escolas superiores poderão, temos a certeza d'isso, tirar proveito da leitura d'esta obra, onde encontrarão questões que os hão de interessar, demonstrações e modos de expôr que poderão aproveitar. Aos alumnos das mesmas escolas pode ella tambem prestar serviços como auxiliar do seu estudo».

G. T.

CENTRE DE GRAVITÉ DU TEMPS DE PARCOURS

PAR

M. Haton de la Goupillière

Membre de l'Institut de France
Inspecteur général des mines
Grand-officier de la Légion d'Honneur.

I

1. Supposons qu'un mobile soit doué d'un pouvoir émissif qui s'exerce proportionnellement au temps. Il laissera le long de sa trajectoire une imprégnation, variable en chaque point en raison inverse de la vitesse. Cette courbe deviendra ainsi un système matériel, dont on peut se proposer de déterminer le centre de gravité.

Sur des éléments consécutifs de même longueur ds, l'émanation s'accumulant en raison du temps employé à les franchir, on pourra la mesurer par ce temps dt lui même. Nous désignerons d'après cela le point en question sous le nom de *centre de gravité du temps de parcours.*

Cette note est destinée à en présenter quelques exemples.

2. Envisageons d'abord, comme le plus simple, le mouvement parabolique effectué librement sous l'action de la pesanteur.

En supposant un tir horizontal avec la vitesse V, on a:

$$x = Vt, \quad t = \frac{x}{V}, \quad dt = \frac{dx}{V},$$

$$y = \frac{1}{2} gt^2 = \frac{gx^2}{2V^2},$$

et pour les moments M_x, M_y, relatifs aux axes de coordonnées:

$$dM_y = xdt = \frac{xdx}{V}, \quad dM_x = ydt = \frac{gx^2dx}{2V^3},$$

$$M_y = \frac{x^2}{2V}, \quad M_x = \frac{gx^3}{6V^3},$$

d'où les coordonnées X, Y du centre de gravité cherché:

$$X = \frac{M_y}{t} = \frac{x}{2}, \quad Y = \frac{M_x}{t} = \frac{gx^2}{6V^2} = \frac{y}{3},$$

proportionnelles à celles du mobile lui-même.

Le lieu géométrique de ce centre a dès lors pour équation:

$$(3Y) = \frac{g}{2V^2}(2X)^2, \quad Y = \frac{2g}{3V^2} X^2.$$

Elle représente une parabole, dont le paramètre est les $\frac{3}{4}$ du précédent.

3. Considérons en second lieu le mouvement elliptique résultant de la projection orthogonale d'un mouvement circulaire uniforme.

Prenons le rayon comme unité de longueur, et, pour unité de vitesse angulaire, celle de la rotation. L'arc décrit aura dès lors pour valeur t. Les coordonnées du point décrivant seront, dans le plan du cercle, $\cos t$ et $\sin t$. Dans le plan de l'ellipse, l'abscisse

parallèle à l'intersection ne change pas. L'ordonnée du mobile devient $a \sin t$, si a désigne le cosinus de l'angle dièdre:

$$x = \cos t, \quad y = a \sin t,$$

$$t = \arccos x, \quad dt = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$dM_y = x dt = -\frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$M_y = \int_1^x \frac{-2x dx}{2\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}.$$

$$dM_x = y dt = -a\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -a dx,$$

$$M_x = \int_1^x (-a dx) = a(1-x).$$

et enfin:

$$X = \frac{M_y}{t} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\arccos x}, \quad Y = \frac{M_x}{t} = \frac{a(1-x)}{\arccos x}.$$

4. Cherchons en coordonnées polaires r, θ, l'équation du lieu des centres de gravité.

On a d'abord:

$$\tan^2 \theta = \frac{Y^2}{X^2} = a^2 \frac{1-x}{1+x},$$

$$x = \frac{a^2 - \tan^2 \theta}{a^2 + \tan^2 \theta}.$$

En second lieu:

$$r^2 = X^2 + Y^2 = \frac{(1+a^2) - 2a^2 x - (1-a^2) x^2}{(\arccos x)^2},$$

d'où :

$$r^2 (\arccos x)^2 (a^2 + \operatorname{tang}^2 \theta)^2 =$$

$$(1+a^2)(a^2+\operatorname{tang}^2\theta)^2 - 2a^2(a^4-\operatorname{tang}^4\theta) - (1-a^2)(a^2-\operatorname{tang}^2\theta)^2$$

$$= 4a^2 \operatorname{tang}^2 \theta (1 + \operatorname{tang}^2 \theta) = \frac{4a^2 \sin^2 \theta}{\cos^4 \theta},$$

et en extrayant la racine carrée:

$$r (a^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \arccos \left(\frac{a^2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{a^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \right) = 2a \sin \theta .$$

II

5. Ce problème nous présente un exemple du mouvement d'un point libre sous l'influence d'une force centrale, qui est dans ce cas proportionnelle à la distance.

D'une manière générale, un tel mouvement, quelle que soit la loi d'attraction, reste subordonné à la loi des aires:

$$\frac{\frac{1}{2} r^2 d\theta}{A} = \frac{dt}{t},$$

si A désigne l'aire décrite dans le temps t:

$$A = \frac{1}{2} \int r^2 d\theta .$$

On a donc:

$$dt = \frac{t}{2A} . r^2 d\theta ,$$

$$dM_y = x dt = \frac{t}{2A} . r^3 \cos \theta \, d\theta ,$$

$$dM_x = y\,dt = \frac{t}{2A} . r^3 \sin\theta\, d\theta ,$$

$$M_y = \frac{t}{2A}\int r^3 \cos\theta\, d\theta , \quad M_x = \frac{t}{2A}\int r^3 \sin\theta\, d\theta ,$$

et enfin:

$$(1) \qquad X = \frac{M_y}{t} = \frac{1}{2A}\int r^3 \cos\theta\, dt , \quad Y = \frac{M_x}{t} = \frac{1}{2A}\int r^3 \sin\theta\, d\theta .$$

6. Prenons, comme exemple d'application de ces formules générales, la spirale logarithmique:

$$r = e^{\theta \cot a} ,$$

pour laquelle la force est inversement proportionnelle au cube de la distance au pôle.

Nous compterons ses arcs à partir de ce point. L'aire a dès lors pour valeur:

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\theta} r^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\theta} e^{2\theta \cot a}\, d\theta = \frac{\operatorname{tang} a}{2}\, e^{2\theta \cot a} .$$

On a donc, d'après la première des formules (1):

$$2AX = \int_{-\infty}^{\theta} e^{3\theta \cot a} \cos\theta\, d\theta ,$$

ou, en posant pour simplifier:

$$3 \cot a = \cot b ,$$

$$2AX = \int_{-\infty}^{\theta} e^{\theta \cot b}\, d\theta = e^{\theta \cot b} \cos(\theta - b) \sin b ,$$

$$X = \frac{e^{3\theta \cot a} \cos(\theta - b) \sin b}{e^{2\theta \cot a} \operatorname{tang} a} = r \sin b \cot a \cos(\theta - b) .$$

On obtiendrait de même:

$$Y = r \sin b \cot a \sin(\theta - b).$$

7. Nous pouvons déterminer le lieu géométrique du centre de gravité du temps de parcours.

Designons par r', θ' ses coordonnées polaires, il viendra:

$$\operatorname{tang}\theta' = \frac{Y}{X} = \operatorname{tang}(\theta - b), \quad \theta' = \theta - b, \quad \theta = \theta' + b,$$

et en second lieu:

$$r' = \sqrt{X^2 + Y^2} = r \sin b \cot a = e^{(\theta' + b)\cot a} \sin b \cot a.$$

Posons encore:

$$e^{c \cot a} = e^{b \cot a} \sin b \cot a,$$

nous aurons:

$$r' = e^{(\theta' + c)\cot a} = e^{\theta'' \cot a},$$

si nous prenons $\theta'' = \theta' + c$, en faisant tourner de l'angle c l'axe polaire.

Concluons que le lieu cherché est une spirale logarithmique égale, tournée d'un certain angle [1].

8. Les intégrations des formules (1) peuvent encore s'effectuer dans les divers cas suivants: 1.° sections coniques rapportées au foyer (force en raison inverse du carré de la distance); 2.° cercle rapporté à l'un de ses points (force en raison inverse

---

[1] Si l'on résolvait numériquement par rapport à a l'équation transcendante: $c = 2k\pi$, on obtiendrait des spirales spéciales qui renferment en elles-mêmes tous leurs centres de gravité du temps de parcours suivant la loi des aires.

de la cinquième puissance de la corde); 3.° limaçon de Pascal (force en raison inverse de la quatrième puissance de la distance). Mais je ne m'attarderai pas à ces développements.

III

9. Passons maintenant au cas des liaisons, et considérons un mobile assujetti à parcourir sous l'action de la gravité une courbe donnée dans un plan vertical.

Nous en prendrons l'équation sous la forme:

$$x = f(z),$$

en choisissant comme axe des abscisses le niveau de vitesse nulle, et adoptant des ordonnées *plongeantes* z.

Le théorème des forces vives donne dans ces conditions:

$$v^2 = 2gz = \frac{ds^2}{dt^2},$$

$$\sqrt{2g}\, dt = \frac{ds}{\sqrt{z}},$$

$$ds = dz \sqrt{1 + f'^2(z)},$$

$$\sqrt{2g}\, dt = dz \sqrt{\frac{1 + f'^2(z)}{z}}$$

d'où, en multipliant respectivement par x et z:

$$\sqrt{2g}\, d\,\mathrm{M}_z = dz \,.\, f(z) \sqrt{\frac{1 + f'^2(z)}{z}},$$

$$\sqrt{2g}\, d\,\mathrm{M}_x = dz \sqrt{z\left[1 + f'^2(z)\right]},$$

et en divisant membre à membre:

$$X = \frac{M_z}{t} = \frac{\int_0^z f(z)\sqrt{\frac{1+f'^2(z)}{z}}\,dz}{\int_0^z \sqrt{\frac{1+f'^2(z)}{z}}\,dz},$$

$$Z = \frac{M_x}{t} = \frac{\int_0^z \sqrt{z[1+f'^2(z)]}\,dz}{\int_0^z \sqrt{\frac{1+f'^2(z)}{z}}\,dz}.$$

Telles sont les formules générales qui résolvent la question.

10. Si l'on prend, pour les appliquer, la seconde parabole cubique:

$$x = \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}, \quad 1 + f'^2(z) = z + 1,$$

les trois intégrales deviennent:

$$\sqrt{2g}\,t = \int_0^z \sqrt{\frac{z+1}{z}}\,dz$$

$$= 2\sqrt{z(z+1)} + \mathrm{Log}\left[1 + 2z + 2\sqrt{z(z+1)}\right],$$

$$\sqrt{2g}\,M_z = \frac{2}{3}\int_0^z z\sqrt{z+1}\,dz$$

$$= \frac{4}{45}\left[(3z-2)(z+1)^{\frac{3}{2}} + 2\right],$$

$$\sqrt{2g}\,M_x = \int_0^z \sqrt{z(z+1)}\,dz$$

$$= \frac{(2z+1)\sqrt{z(z+1)}}{4} - \frac{1}{8}\mathrm{Log}\left[1 + 2z + 2\sqrt{z(z+1)}\right].$$

Les intégrations réussiraient de même avec une vitesse initiale et un point de départ quelconque, mais elles deviennent plus compliquées et je m'abstiens de les transcrire.

11. Envisageons le pendule cycloidal, c'est-à-dire (fig. 1) la

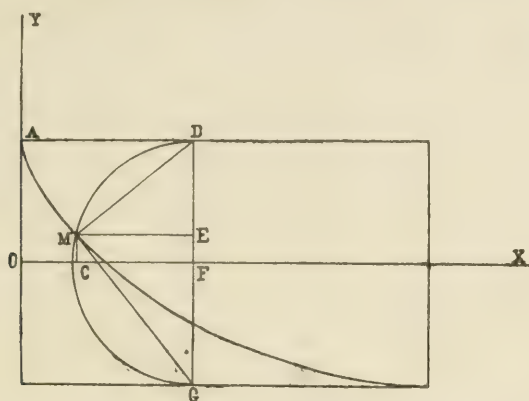



Fig. 1

cycloide renversée, rapportée aux axes OX et OY.

On a, pour l'abscisse du point M:

$$x = OC = AD - ME,$$

$$AD = \text{arc } MD = \text{arc} \cos FE = \text{arc} \cos y,$$

$$ME = \sqrt{ED \cdot EG} = \sqrt{(1-y)(1+y)},$$

et par conséquent, comme équation de la trajectoire:

$$x = \text{arc} \cos y - \sqrt{1-y^2}. \tag{2}$$

Nous supposerons que le mobile part sans vitesse du point de rebroussement:

$$v^2 = 2g(1-y) = \frac{ds^2}{dt^2},$$

$$\sqrt{2g}\, dt = \frac{ds}{\sqrt{1-y}}.$$

L'arc cycloidal comprise entre M et le sommet est le double de la tangente MG, qui est elle-même moyenne proportionnelle entre GD et GE:

$$s = 2\sqrt{2(1+y)}.$$

Comme d'ailleurs ds est négatif:

$$ds = -\frac{\sqrt{2}\,dy}{\sqrt{1+y}},$$

$$(3) \qquad \sqrt{g}\,.\,dt = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$t\sqrt{g} = -\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \operatorname{arc}\cos y\,.$$

En multipliant les deux membres de l'équation (3) par x (2), il vient:

$$\sqrt{g}\,dM_y = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\left[\operatorname{arc}\cos y - \sqrt{1-y^2}\right] = dy - \frac{\operatorname{arc}\cos y}{\sqrt{1-y^2}}dy,$$

$$\sqrt{g}\,M_y = y - 1 + \int_1^y \operatorname{arc}\cos y\,.\,d(\operatorname{arc}\cos y) = y - 1 + \frac{1}{2}(\operatorname{arc}\cos y)^2.$$

En multipliant au contraire par y:

$$\sqrt{g}\,dM_x = -\frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$\sqrt{g}\,M_x = -\int_1^y \frac{2y\,dy}{2\sqrt{1-y^2}} = \sqrt{1-y^2}.$$

On déduit de là:

$$X = \frac{M_y}{t} = \frac{y-1}{\arccos y} + \frac{\arccos y}{2},$$

$$Y = \frac{M_x}{t} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\arccos y}.$$

La recherche du lieu géométrique des centres de gravité du temps de parcours du pendule cycloidal (c'est-à-dire l'élimination entre ces deux relations de y, ou plus simplement de $\omega = \frac{1}{2} \arccos y$) peut se ramener à la résolution d'une équation du troisième degré en ω.

12. Le pendule circulaire, malgré sa simplicité apparente, est, comme on le sait, d'une nature plus compliquée au point de vue dynamique que le pendule cycloidal. Des trois intégrales t, M_x, M_z, les deux premières sont alors elliptiques; mais la troisième reste élémentaire, et peut s'interpréter très simplement.

On a en effet, en appelant α l'écart du pendule par rapport à la verticale, avec un point de départ quelconque M_0:

$$v^2 = 2g(z - z_0),$$

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(z-z_0)}} = \frac{-d\alpha}{\sqrt{2g(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}},$$

$$dM_z = x dt = \sin\alpha \, . \, dt = \frac{-\sin\alpha \, d\alpha}{\sqrt{2g(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}} = \frac{d(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}{\sqrt{2g(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}},$$

$$M_z = \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{\cos\alpha - \cos\alpha_0} = \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{z - z_0}.$$

Imaginons que l'arc de cercle matériel engendre par sa révolution une zône sphérique de même densité que lui sur les différents parallèles. La masse de la zône de hauteur $z - z_0$ sera

précisement $2\pi M_2$. On voit d'après cela qu'elle est en raison de la racine carrée de cette hauteur, ou, en d'autres termes, de la moyenne géométrique entre celle-ci et le rayon; tandis que la surface de la zône homogène est proportionnelle à la hauteur elle-même.

13. Le centre de gravité de cette zône se trouvant nécessairement sur l'axe de révolution, condensons en leurs centres respectifs les masses des zônes infinitésimales, de manière à constituer une droite matérielle de même centre de gravité que la zône considérée dans son ensemble.

La masse totale étant représentée par $\sqrt{h}$, sa différentielle est $\frac{dh}{2\sqrt{h}}$, le moment élémentaire par rapport au plan de la base supérieure $\frac{dh}{2\sqrt{h}} \cdot h = \frac{1}{2}\sqrt{h}\,dh$, et le moment total $\frac{1}{3}h^{\frac{3}{2}}$. La distance du centre cherché à ce plan sera donc $\frac{h}{3}$, tandis qu'elle est $\frac{h}{2}$ pour la zône homogène.

IV

14. Parfois, en cinématique, ou fournit immédiatement *l'équation du mouvement sur la trajectoire*:

$$t = f(s),$$

qui relie le temps t à l'arc s de cette ligne, directement donnée.

Il peut alors devenir avantageux de représenter cette courbe à l'aide de ses *coordonnées intrinsèques:* arc s et angle de contingence ω:

$$s = \varphi(\omega), \quad ds = \varphi'(\omega)\,d\omega.$$

Pour la recherche, dans ces conditions, du centre de gravité du temps de parcours, prenons comme axes des abscisses et des ordonnées la tangente et la normale au point O de la trajectoire

qui forme l'origine des angles (fig. 2). Nous aurons, en intégrant

Fig. 2

par parties:

$$dM_y = xdt\,,$$

$$M_y = \int_0^\omega xdt = xt - \int_0^\omega tdx\,,$$

car le terme xt disparait pour la limite inférieure de l'intégration, qui annule à la fois ses deux facteurs. On a donc:

$$Xt = xt - \int_0^\omega t\,.\,ds\cos\omega\,,$$

$$X = x - \frac{1}{t}\int_0^\omega f(s)\,.\,\varphi'(\omega)\,d\omega\,.\cos\omega\,.$$

Imaginons, pour simplifier, des axes $M\xi$, $M\eta$ parallèles aux premiers, mais dirigés dans des sens précisément opposés, et menés par le point mobile, qui leur sert lui-même d'origine. On aura:

$$\xi = x - X\,,\quad \eta = y - Y\,,$$

c'est-à-dire:

$$\xi = \frac{1}{f[\varphi(\omega)]}\int_0^\omega f[\varphi(\omega)]\,\varphi'(\omega)\cos\omega\,d\omega\,, \tag{4}$$

et de même:

$$(5)\qquad \eta = \frac{1}{f[\varphi(\omega)]}\int_0^{\varpi} f[\varphi(\omega)]\,\varphi'(\omega)\sin\omega\, d\omega\,.$$

15. Pour présenter une application de ces formules générales, choisissons comme courbe l'épicycloide:

$$s = S\left(1 - \cos\frac{\pi\omega}{2\alpha}\right),$$

rapportée à l'un de ses points de rebroussement O (fig. 2). Les coordonnées de son sommet M_1 sont S et α; celles du rebroussement M_2: 2S et 2α.

Envisageons d'autre part, comme loi de mouvement, l'isochronisme, qui constitue l'une des propriétés les plus remarquables de ces courbes [1]. Désignons pour un instant par σ l'arc M_1M compté à partir du sommet dans la direction du rebroussement O:

$$\sigma = S - s\,.$$

L'équation du mouvement isochrône sur la trajectoire est:

$$\sigma = \sigma_0 \cos\frac{\pi t}{2T},$$

et donne $t = T$ pour $\sigma = 0$, quelle que soit la distance σ_0 du point de départ. Mais, pour la recherche actuelle, nous supposerons spécialement l'oscillation *complète*, dans laquelle le mobile part du point de rebroussement sans vitesse initiale.

---

[1] Elle est connue depuis longtemps pour les conditions ordinaires. Je l'ai étendue (*Journal de mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. XIII, pag. 204) au cas du frottement de glissement avec milieu résistant. Mais ici je me réduirai au mode classique, en supprimant ces obstacles, et ramenant dès lors au sommet de l'épicycloide (d'où le déplacent les résistances) le centre de tautochronisme.

Faisons donc $\sigma_0 = S$, il viendra :

$$S - s = S \cos \frac{\pi t}{2T}, \quad t = \frac{2T}{\pi} \operatorname{arc\,cos} \left(\frac{S - s}{S} \right).$$

Pour appliquer les formules générales (4 et 5), nous aurons à substituer :

$$f(s) = \frac{2T}{\pi} \operatorname{arc\,cos} \left(1 - \frac{s}{S} \right),$$

$$\varphi(\omega) = S \left(1 - \cos \frac{\pi \omega}{2\alpha} \right),$$

$$f[\varphi(\omega)] = \frac{2T}{\pi} \operatorname{arc\,cos} \left\{ 1 - \frac{1}{S} \cdot S \left[1 - \cos \left(\frac{\pi \omega}{2\alpha} \right) \right] \right\} = \frac{T}{\alpha} \omega,$$

$$\varphi'(\omega) = \frac{\pi S}{2\alpha} \sin \frac{\pi \omega}{2\alpha}.$$

16. Il vient d'après cela :

$$\xi = \frac{\alpha}{T\omega} \int_0^{\omega} \frac{T\omega}{\alpha} \cdot \frac{\pi S}{2\alpha} \sin \left(\frac{\pi \omega}{2\alpha} \right) . \cos \omega \, d\omega$$

$$= \frac{\pi S}{2\alpha\omega} \int_0^{\omega} \omega \sin \frac{\pi \omega}{2\alpha} \cos \omega \, d\omega,$$

ou, en décomposant ce produit trigonométrique [1] :

$$\xi = \frac{\pi S}{\alpha \omega} \int_0^{\omega} \omega \left\{ \sin \left[\frac{(\pi + 2\alpha)\omega}{2\alpha} \right] + \sin \left[\frac{(\pi - 2\alpha)\omega}{2\alpha} \right] \right\} d\omega.$$

---

[1] Cette décomposition reste évidemment toujours permise, mais l'intégration consécutive ne l'est qu'à la condition expresse d'exclure de cette analyse le cas particulier :

$$\pi - 2\alpha = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{2},$$

car il y a lieu, pour l'effectuer, de diviser par le facteur $\pi - 2\alpha$.

Cette circonstance n'introduit du reste aucune lacune, car ce cas, qui

En effectuant les calculs de l'intégration, dont je supprime le détail, on obtient:

$$\frac{(\pi-2\alpha)^2}{8\pi\alpha S}\xi = \sin\omega\sin\frac{\pi\omega}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\alpha}\cos\omega\cos\frac{\pi\omega}{2\alpha}$$

$$+\frac{1}{(\pi+2\alpha)^2\omega}\left\{(\pi^2+4\alpha^2)\cos\omega\sin\frac{\pi\omega}{2\alpha} - 4\pi\alpha\sin\omega\cos\frac{\pi\omega}{2\alpha}\right\}.$$

On trouve de même:

$$\frac{(\pi-2\alpha)^2}{8\pi\alpha S}\eta = \cos\omega\sin\frac{\pi\omega}{2\alpha} - \frac{\pi}{2\alpha}\sin\omega\cos\frac{\pi\omega}{2\alpha}$$

$$+\frac{1}{(\pi+2\alpha)^2\omega}\left\{(\pi^2+4\alpha^2)\sin\omega\sin\frac{\pi\omega}{2\alpha} + 4\pi\alpha\cos\omega\cos\frac{\pi\omega}{2\alpha} - 4\pi\alpha\right\}.$$

On a en particulier pour le sommet M_1, c'est-à-dire la demi oscillation : $\omega=\alpha$,

$$\frac{(\pi-2\alpha)^2}{8\pi\alpha S}\xi_1 = \sin\alpha + \frac{\pi^2+4\alpha^2}{\alpha(\pi+2\alpha)^2}\cos\alpha,$$

$$\frac{(\pi-2\alpha)^2}{8\pi\alpha S}\eta_1 = \cos\alpha + \frac{\pi^2+4\alpha^2}{\alpha(\pi+2\alpha)^2}\sin\alpha - \frac{4\pi}{(\pi+2\alpha)^2}.$$

et pour le rebroussement M_2, c'est-à-dire l'oscillation complète: $\omega=2\alpha$,

$$\frac{(\pi-2\alpha)^2}{8\pi\alpha S}\xi_2 = \cos 2\alpha + \frac{4\alpha}{(\pi+2\alpha)^2}\sin 2\alpha,$$

$$\frac{(\pi-2\alpha)^2}{8\pi\alpha S}\eta_2 = \sin 2\alpha - \frac{4\alpha}{(\pi+2\alpha)^2}\cos 2\alpha - \frac{4\alpha}{(\pi+2\alpha)^2}.$$

---

est celui de la cycloide, s'intégrerait plus simplement encore, et d'ailleurs nous l'avons déjà envisagé par une autre voie (§ 11). Il était toute fois essentiel de placer ici cette remarque, pour éviter que l'on ait l'idée de chercher, dans cette hypothèse très simple, une vérification de l'analyse actuelle.

V

17. La notion du centre de gravité du temps de parcours peut se généraliser.

Au lieu de répartir le long de la trajectoire une densité $\frac{1}{v}$, en changeant par là son arc infinitésimal ds en une masse élémentaire $\frac{1}{v}ds = dt$, on y peut concentrer, à titre de densité, *tel élément de dynamique générale que l'on voudra choisir*, et édifier, *pour chaque choix fait successivement*, toute une théorie semblable à celle que nous venons de parcourir.

18. Adoptons par exemple comme loi générale de la densité à répartir le long de la trajectoire sur laquelle des liaisons assujettissent sans frottement un point matériel, la valeur de la pression mutuelle N qu'exercent l'un sur l'autre, suivant la normale, le mobile et la courbe.

Je considérerai comme application le mouvement d'un point

Fig. 3

pesant sur la chainette renversée (fig. 3) qui a pour équation *intrinsèque:*

$$s = \operatorname{tang} \omega, \quad \rho = \frac{ds}{d\omega} = \frac{1}{\cos^2 \omega}.$$

Nous supposerons que le mobile part du sommet O avec une vitesse initiale égale à celle qui serait due à la hauteur $AO = 1$, à savoir $v_o = \sqrt{2g}$.

On aura dès lors en un point quelconque M:

$$v^2 = v_o^2 + 2g \cdot MQ = 2g(1 + MQ) = 2g \cdot MP,$$

$$\rho = MC = MR = \frac{MP}{\cos\omega},$$

$$\frac{v^2}{\rho} = 2g\cos\omega.$$

La force centripète $\frac{v^2}{\rho}$ résulte de la composante normale $g\cos\omega$ de la pesanteur et de la réaction N. Cette dernière restera donc, comme chacune des deux autres, proportionnelle à la fonction $\cos\omega$, qui peut dès lors être prise comme expression de la densité.

La masse élémentaire sera d'après cela:

$$dm = ds\cos\omega = dx, \quad m = x.$$

On a par conséquent:

$$d\,M_z = xdm = xdx, \quad M_z = \frac{x^2}{2},$$

$$X = \frac{M_z}{m} = \frac{x}{2},$$

et en second lieu:

$$d\,M_x = zdm = zdx,$$

$$Z = \frac{M_z}{m} = \frac{1}{x}\int zdx.$$

Le centre de gravité de la pression normale a dès lors pour abscisse la moitié de celle du mobile, et comme ordonnée l'ordonnée moyenne de la trajectoire.

Nous pouvons d'ailleurs obtenir l'expression explicite de ces deux coordonnées en fonction de la variable indépendante ω.

Il vient d'abord:

$$X = \frac{1}{2}\int_0^{\omega} ds \cos\omega = \frac{1}{2}\int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\cos\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{Log\,tang}\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

En second lieu, en intégrant par parties:

$$Z = \frac{1}{x}\int_0^{\omega} z dx = z - \frac{1}{x}\int_0^{\omega} x dz = \int_0^{\omega} ds\,.\sin\omega - \frac{1}{x}\int_0^{\omega} x ds \sin\omega$$

$$= \int_0^{\omega} \frac{\sin\omega\, d\omega}{\cos^2\omega} - \frac{1}{x}\int_0^{\omega} x\frac{\sin\omega\, d\omega}{\cos^2\omega}$$

$$= \frac{1}{\cos\omega} - 1 - \frac{1}{x}\left(\frac{x}{\cos\omega} - \int_0^{\omega}\frac{dx}{\cos\omega}\right) = -1 + \frac{1}{x}\int_0^{\omega} ds$$

$$= \frac{\operatorname{tang}\omega}{\operatorname{Log\,tang}\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} - 1.$$

19. On peut enfin formuler l'équation du lieu géométrique du centre de gravité de la pression normale.

Ecrivons en effet:

$$e^{2X} = \operatorname{tang}\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}}{1-\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}},$$

$$\operatorname{tang}\frac{\omega}{2} = \frac{e^{2X}-1}{e^{2X}+1},$$

$$2X(Z+1) = \operatorname{tang}\omega = \frac{2\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}}{1-\operatorname{tang}^2\frac{\omega}{2}} = \frac{2(e^{4X}-1)}{(e^{2X}+1)^2-(e^{2X}-1)^2},$$

et enfin, en remontant l'axe des abscisses de OX en AR :

$$Z' = \frac{e^{2X} - e^{-2X}}{4X}.$$

VI

20. Adoptons maintenant comme densité la force centripète elle-même $\frac{v^2}{\rho}$ (sans l'associer comme tout à l'heure avec les forces extérieures agissantes). La masse élémentaire deviendra $\frac{v^2}{\rho}.ds$ c'est-à-dire $v^2 d_\omega$.

Si l'on s'attache spécialement au cas de la gravité, avec des ordonnées plongeantes z rapportées au niveau de vitesse nulle, on aura :

$$v^2 = 2gz,$$

et la masse élémentaire deviendra :

$$dm = 2gzd\omega.$$

21. Considérons comme application le pendule simple, en supposant que le mobile parte sans vitesse du point situé sur l'horizontale du centre :

$$dm = 2g \sin \omega \, d\omega, \quad m = 2g(1 - \cos \omega) = 4g \sin^2 \frac{\omega}{2},$$

$$d\,M_z = xdm = 2g \sin \omega \cos \omega \, d\omega, \quad M_z = g \sin^2 \omega,$$

$$d\,M_x = zdm = 2g \sin^2 \omega \, d\omega, \quad M_x = \frac{g}{2}(2\omega - \sin 2\omega),$$

et par conséquent :

$$X = \frac{M_z}{m} = \cos^2 \frac{\omega}{2}, \quad Z = \frac{M_x}{m} = \frac{2 \quad \sin 2\omega}{8 \sin^2 \frac{\omega}{2}}.$$

On a par exemple [1], en étendant le mouvement jusqu'au point le plus bas:

$$X_1 = \frac{1}{2}, \quad Y_1 = \frac{\pi}{4}.$$

22. Imaginons, comme seconde application, qu'une développante de cercle *d'ordre quelconque n* soit parcourue par un mobile, de telle sorte que l'espace décrit soit proportionnel à une puissance k du temps.

Une telle courbe a pour équation intrinsèque:

$$s = \omega^{n+1}.$$

L'arc s devant être une puissance du temps, il en sera de même de $\frac{ds}{dt}$ ou v. Mais inversement le temps est une puissance de s; la vitesse sera donc elle même puissance de s, et également v^2. D'autre part ρ ou $\frac{ds}{d\omega}$ est, comme s, une puissance de ω, et par suite, inversement, de s. Concluons que la densité $\frac{v^2}{\rho}$ présente elle même ce caractère.

Nous nous trouvons par suite en présence de cet énoncé: trouver le centre de gravité (ordinaire) d'un arc de développante de cercle d'ordre quelconque, dont la densité varie comme une certaine puissance p de sa longueur.

Or j'ai déjà eu occasion d'envisager ce problème dans une autre circonstance, à laquelle je ne puis que me référer en ce moment (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome CXLII, pag. **1134**). C'était à la vérité sous la réserve expresse que cette

[1] On peut obtenir l'équation du lieu géométrique de ce centre, mais elle est compliquée.

On peut également déterminer le centre de gravité de la force centripète pour la tractrice, en se servant de son équation intrinsèque:

$$\rho = \operatorname{tang} \omega,$$

et supposant qu'un mobile la suit sous l'action de la pesanteur à partir de son point de rebroussement.

puissance p fût entière et positive. Mais, si l'on effectue le calcul dont je viens de tracer le canevas, on trouve:

$$k = \frac{2}{\frac{n+2}{n+1} - p}.$$

Il suffira donc d'attribuer à n et p diverses valeurs entières et positives, pour obtenir une double infinité de valeurs de k entières ou fractionnaires remplissant la condition voulue.

S'il s'agit par exemple de la développante de cercle proprement dite ($n = 1$), et d'une densité proportionnelle à l'arc lui-même ($p = 1$), il vient: $k = 4$. Il suffit du reste, pour aboutir à cette loi de densité $p = 1$ avec un ordre quelconque n de développantes, de prendre $k = 2(n+1)$.

Si l'on suppose que *le cercle lui même* ($n = o$) soit parcouru d'un mouvement uniformément varié ($k = 2$), il vient: $p = 1$, c'est-à-dire une densité des arcs de cercle proportionnelle à leur longueur. J'ai donné pour le lieu du centre de gravité dans ce cas (*loco citato*, pag. 1075) l'équation:

$$\frac{2(1-x)y}{x^2+y^2} = \sin\left(2\sqrt{\frac{1-x}{x^2+y^2}}\right) - 2\sqrt{\frac{1-x}{x^2+y^2}}\cos\left(2\sqrt{\frac{1-x}{x^2+y^2}}\right).$$

VII

23. Supposons enfin que l'on adopte comme densité la force tangentielle $\frac{dv}{dt}$. La masse infinitésimale sera dès lors $\frac{dv}{dt}.ds$, c'est-à-dire vdv, ou l'accroissement de demi force vive. Il s'agit donc alors du *centre de gravité de l'énergie acquise dans le parcours*.

Attachons-nous spécialement au cas de la gravité agissant le long d'une trajectoire:

$$x = f(z),$$

tracée dans un plan vertical et rapportée au niveau de vitesse nulle. Le théorème du travail donne alors pour l'expression de la demi force vive :

$$m = \frac{v^2}{2} = gz, \quad dm = vdv = gdz.$$

Il vient donc d'une part :

$$d\,\mathrm{M}_x = zdm = gzdz, \quad \mathrm{M}_x = \frac{gz^2}{2},$$

$$\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{M}_x}{m} = \frac{z}{2}.$$

Ainsi, quelle que soit la trajectoire, le centre cherché se trouve au milieu de la hauteur parcourue.

Nous avons d'autre part pour l'abscisse :

$$d\,\mathrm{M}_z = xdm = f(z)\,.\,gdz, \quad \mathrm{M}_z = g\int_0^z f(z)\,dz,$$

$$\mathrm{X} = \frac{\mathrm{M}_z}{m} = \frac{1}{z}\int_0^z f(z)\,dz,$$

c'est-à-dire l'abscisse moyenne de l'arc parcouru.

Nous pouvons, pour une trajectoire quelconque, écrire directement l'équation du lieu géométrique du centre de gravité de l'énergie. Si en effet, dans cette dernière relation, nous remplaçons z par 2Z, il vient :

$$\mathrm{X} = \frac{1}{2\mathrm{Z}}\int_0^{2\mathrm{Z}} f(\alpha)\,d\alpha.$$

24. Envisageons comme application le pendule circulaire, en supposant pour simplifier qu'il parte sans vitesse du niveau du

point de suspension:

$$x = \sqrt{1 - z^2},$$

$$\int_0^z f(z)\,dz = \frac{z\sqrt{1 - z^2} + \arcsin z}{2},$$

$$2X = \sqrt{1 - z^2} + \frac{\arcsin z}{z}.$$

Pour la demi-oscillation complète étendue jusqu'au point le plus bas, on obtient, en faisant $z = 1$:

$$X_1 = \frac{\pi}{4}, \quad Z_1 = \frac{1}{2},$$

L'équation du lieu géométrique du centre de gravité:

$$2X = \sqrt{1 - 4Z^2} + \frac{\arcsin 2Z}{2Z},$$

reste donc réelle, puisque Z ne dépasse pas $\frac{1}{2}$.

25. Soit, comme seconde application, une courbe quelconque:

$$r = f(\theta), \quad dr = f'(\theta)\,d\theta,$$

parcourue librement suivant la loi des aires sous l'empire de la force centrale $F(r)$:

$$dm = v dv = F(r)\,dr,$$

$$m = \int_0^\theta F[f(\theta)]\,f'(\theta)\,d\theta,$$

$$d M_y = x dm = r\cos\theta \,.\, F(r)\,dr,$$

$$M_y = \int_0^\theta f(\theta) \,.\, F[f(\theta)] \,.\, f'(\theta) \,.\, \cos\theta \,.\, d\theta,$$

d'où la valeur de X, en divisant ces intégrales l'une par l'autre et une formule correspondante en Y dans laquelle $\sin\theta$ remplace $\cos\theta$.

26. Considérons par exemple la spirale sinusoide d'ordre quelconque n, entier ou fractionnaire, positif ou négatif:

$$r^n = \sin n\theta\,, \quad r = \sin^{\frac{1}{n}} n\theta\,,$$

$$dr = \sin^{\frac{1-n}{n}} n\theta \cos n\theta \, d\theta\,.$$

On sait par la théorie de ces courbes que la force centrale s'exerce alors en raison inverse de la puissance $2n+3$ de la distance:

$$\mathrm{F}(r) = r^{-2n-3}\,.$$

Il vient dès lors (*en réservant expressément* pour chaque cas d'apprécier l'effet des limites des intégrations, lequel peut compliquer ces expressions de nouveaux termes):

$$m = \sin^{-2\frac{n+1}{n}} n\theta\,,$$

$$\mathrm{M}_y = \int \sin^{-\frac{3n+2}{n}} n\theta \cos n\theta \cos d\theta\,,$$

$$\mathrm{X} = \sin^{2\frac{n+1}{n}} n\theta \int \sin^{-\frac{3n+2}{n}} n\theta \cos n\theta \cos\theta \, d\theta\,,$$

et la formule semblable en Y.

Ajoutons, sans nous y arrêter, que les intégrations s'achèvent complètement dans les divers cas suivants: $n = -2$ (hyperbole équilatère rapportée à son centre, force proportionnelle à la distance); $n = -\frac{1}{2}$ (parabole au foyer, gravitation); $n = +\frac{1}{2}$ $\left(\text{limaçon, force } \frac{1}{r^4}\right)$; $n = 1$ $\left(\text{cercle passant au pôle, force } \frac{1}{r^5}\right)$; $n = 2$ $\left(\text{lemniscate, force } \frac{1}{r^7}\right)$.

VIII

27. Je terminerai cette étude par la question suivante. Imaginons un observateur entrainé dans la translation d'un système d'axes qui a pour origine le mobile lui-même. Le centre de gravité des arcs parcourus (qu'il s'agisse de temps, de pression, d'énergie, ou de tout autre élément dynamique adopté comme densité de la trajectoire absolue) lui paraitra animé d'un mouvement relatif, dont on peut se proposer de connaître la trajectoire apparente.

Rien de plus facile en termes généraux. Les complications seront pour l'application. Si la trajectoire absolue a pour équation:

$$y = f(x),$$

et si la théorie qui correspond au choix de la densité a donné pour le centre de gravité:

$$X = \varphi(x, y), \quad Y = \psi(x, y),$$

on aura pour les coordonnées de son mouvement relatif:

$$\xi = x - X = x - \varphi[x, f(x)],$$
$$\eta = y - Y = f(x) - \psi[x, f(x)],$$

et il suffira d'éliminer x entre ces deux formules, ou même, si c'est impossible, de les discuter en cet état, comme on le fait pour les unicursales.

Remarquons d'ailleurs que c'est précisément sous cette forme que s'est présenté de lui-même le résultat dans l'une de nos recherches générales, celle du § IV.

Pour les autres, on peut [1] reprendre à ce nouveau point de

---

[1] Par exemple, en ce qui concerne le temps de parcours et la parabole (n.° 2), on trouve une autre parabole dont le paramètre est les $\frac{3}{8}$ du proposé.

Pour la pression normale et la chainette renversée (n.° 18), on obtient l'équation:

$$4\eta\xi = (2\xi - 1)\, e^{2\xi} + (2\xi + 1)\, e^{-2\xi}.$$

vue les divers exemples, mais je n'en veux développer les calculs que pour un seul, à savoir: le centre de gravité du temps de parcours de la spirale logarithmique suivant la loi des aires.

A l'instant même où se pose cette question, le lecteur ne manquera pas de répondre: la trajectoire relative doit être une spirale égale tournée d'un certain angle autour du pôle. Cette intuition, fondée sur une expérience si souvent renouvelée sur cette belle courbe, se trouve encore justifiée dans le cas actuel, et nous pouvons aisément l'établir.

28. Les formules du n.° 6 donnent à cet égard:

$$\xi = x - X = r\left[\cos\theta - \sin b \cot a \cos(\theta - b)\right],$$

$$\eta = y - Y = r\left[\sin\theta - \sin b \cot a \sin(\theta - b)\right].$$

Passons aux coordonnées polaires r', θ':

$$r'^2 = \xi^2 + \eta^2 = r^2(1 + \sin^2 b \cot^2 a - \sin 2b \cot a),$$

θ disparaissant de lui-même dans les réductions que subit cette parenthèse. D'autre part:

$$\operatorname{tang}\theta' = \frac{\eta}{\xi} = \frac{\sin\theta - \sin b \cot a \sin(\theta - b)}{\cos\theta - \sin b \cot a \cos(\theta - b)}$$

$$= \frac{\operatorname{tang}\theta + \dfrac{\sin^2 b \cot a}{1 - \sin b \cos b \cot a}}{1 - \dfrac{\sin^2 b \cot a}{1 - \sin b \cos b \cot a}\operatorname{tang}\theta}.$$

Posons:

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin^2 b \cot a}{1 - \sin b \cos b \cot a},$$

il vient:

$$\tang \theta' = \tang(\theta + \alpha), \quad \theta = \theta' - \alpha,$$

$$r' = \frac{\sqrt{1 + \sin^2 b \cot^2 a - \sin 2b \cot a}}{e^{\alpha \cot a}} e^{\theta' \cot a},$$

c'est-à-dire une courbe semblable à la proposée, et par conséquent une spirale égale tournée d'un certain angle.

En égalant à $2k\pi$ l'expression de cet angle, et résolvant numériquement par rapport à a cette équation transcendante, on déterminerait des spirales spéciales pour lesquelles l'observateur verrait le centre de gravité le suivre sur sa propre trajectoire.

Le rayon r' restant proportionnel à r, le mouvement relatif du centre de gravité s'opère suivant la loi des aires, comme celui du mobile lui-même.

A OBRA SCIENTIFICA E A VIDA DO CHIMICO PORTUGUEZ ROBERTO DUARTE SILVA

POR

A. J. Ferreira da Silva

(Conclusão)

SEGUNDA PARTE

I

Temos até aqui considerado o homem de sciencia, o investigador, o sabio; passamos a considera-lo na sua vida particular, nas phases da sua existencia cortada tantas vezes de infortunio, no seu caracter lealissimo e nobre, nos exemplos que nos legou.

Nasceu Roberto Duarte Silva na Ilha de Santo Antão, da provincia de Cabo Verde, aos 25 de fevereiro de 1837. Foram seus pais Francisco José Duarte e D. Mathilde Rosa Silva, naturaes da mesma ilha. Eram mais sete irmãos, dos quaes só hoje vive o sr. Antonio Duarte Silva, a quem devo a maior parte das notas biographicas que vão seguir, e que elle tão gentilmente pôz á minha disposição, como preito á memoria do irmão que tanto queria.

Ainda muito novo, com cerca de dez annos de idade, foi confiado por seu pai á direcção do pharmaceutico Antonio Gonçalves de Almeida Rhino, natural de Santarem, e que se fora estabe-

lecer em Santo Antão; parece que fora a primeira pharmacia da ilha.

Era o referido pharmaceutico coxo e gottôso, e a doença prendia-o a miudo no leito, d'onde dirigia o seu discipulo, e, quando preciso, o corrigia; ROBERTO SILVA, sem murmurar, soffria pacientemente os castigos das suas faltas, e applicava-se, cada vez com maior zelo e cuidado, ao cumprimento dos seus deveres e ao estudo das suas lições.

Estava ainda praticando n'esta pharmacia quando, aos 14 annos, em 15 de janeiro de 1851, teve o grande desgosto de perder seu pai.

O mestre, em apparencia rigoroso e rispido, tinha um espirito esclarecido e sentimentos delicados; e assim affeiçoou-se ao seu discipulo, a tal ponto que, depois d'aquella dolorosa perda, o mandou para Lisboa em 3 de julho de 1854, a praticar em pharmacia e seguir os cursos que lhe eram precisos, para obter o diploma de praticante pharmaceutico pela Escola de Lisboa.

Primeiro esteve na pharmacia da viuva Rhino, parenta do seu mestre, e estabelecida na calçada do Marquez d'Abrantes; depois passou para a do sr. Antonio Feliciano Alves d'Azevedo, Filhos, na praça de D. Pedro, onde continuou a praticar, seguindo os cursos theoricos sob a direcção do illustre pharmaceutico João José de Sousa Telles, que depois foi tambem mestre, em algumas disciplinas no lyceu de Lisboa, de seu irmão Antonio.

Antes de terminar os seus estudos pharmaceuticos e fazer o respectivo exame de habilitação teve o desgosto de perder o seu amigo Gonçalves Rhino, que falleceu em Santo Antão, quasi dois annos antes de elle ter terminado os seus estudos de pharmacia. Não se esqueceu em seu testamento o mestre do discipulo querido, legando lhe uma boa importancia em dinheiro, que o habilitava a concluir os seus estudos.

Pouco depois da perda do sr. Rhino, soffreu outro golpe dolorosissimo: sua queridissima mãe fallecera em Santo Antão no dia 18 de setembro de 1856, victima da epidemia de cholera, que alli se propagára.

Foi em 21 de março de 1857 que elle fez exame de habilitação em pharmacia, sendo presidente da mesa examinadora o dr. Bernardino Antonio Gomes; e tal foi a impressão que o seu saber causou no jury que lhe foi concedida a maxima classifica-

ção — approvação plena com louvor, abraçando-o depois da prova os membros do jury.

A morte de sua mãe influiu muito no destino de ROBERTO DUARTE SILVA. Em vez de regressar á sua terra natal e exercer ali a sua profissão, como era a principio o seu intuito, partiu em abril de 1857 para Macau, onde foi administrar uma pharmacia cujo proprietario era de lá natural ou alli residia. Ahi esteve tres annos, indo depois estabelecer-se em Hong-Kong.

Uma prova da gentileza do seu caracter é que logo que partiu para Macau deu ordem para que viesse para Lisboa seguir os estudos pharmaceuticos, por sua conta, seu irmão Antonio; este de facto esteve em Lisboa até 1866, onde seguiu o curso de pharmaceutico de primeira classe, indo depois montar uma pharmacia na cidade de Mindello, da Ilha de S. Vicente, onde reside.

Correram bem a ROBERTO SILVA os negocios em Hong-Kong. Era na epoca da expedição franceza á China. Alcançou, narra o sr. FRIEDEL, o titulo de forriecedor da esquadra franceza. Muito longe de abusar d'esta qualidade, houve-se, n'uma occasião em que o corpo expedicionario francez tinha falta de sulfato de quinino, para tratamento dos seus doentes, com tal delicadeza, que lhe valeu a estima e amizade dos medicos e pharmaceuticos militares que com elle tinham tido relações. Contribuiu, sem duvida, esta amizade para o attrahir a França; e encontrou, de facto, verdadeiras affeições quando n'esta nação veiu fixar a sua residencia. SILVA, continua FRIEDEL, discreto até o extremo em tudo que lhe dizia respeito, como no que concernia aos outros, nada disse nunca d'este incidente tão honroso, e só pouco antes da sua morte se teve conhecimento d'elle por meio de um dos seus amigos da China.

Mas se a fortuna lhe sorria pelo lado da prosperidade dos seus negocios, a sua saude resentia-se do clima: vieram as febres, depois uma bronchite, que desde principio lhe deu muito cuidado.

Esta circumstancia, o vivo amor que sempre nutriu pela sciencia chimica, o reconhecer que a sua educação n'esta especie fora muito incompleta, a admiração que nunca deixou de consagrar aos grandes mestres que se illustraram pelas suas descobertas e o desejo de os ouvir de viva voz e aprender com elles — tudo isto o determinou a abandonar a China em 1862, na qual não esteve mais do que cinco annos, e a regressar á Europa, seguindo para Paris, afim de continuar os seus estudos.

Ahi começou a frequentar, no anno lectivo de 1862-1863, os cursos dos grandes mestres, cujas obras elle lêra e cujos trabalhos conhecia: — BALARD, BERTHELOT, SAINTE-CLAIRE DEVILLE, WURTZ e outros.

O inverno de Paris foi prejudicial á saude, e por conselho dos medicos, teve de renunciar a seguir estas lições; voltou a Portugal, estando algum tempo em Bellas e Lisboa; só em março de 1863 voltou definitivamente a Paris.

Convencido de que, para aproveitar devidamente as lições d'aquelles professores, era indispensavel preparar-se seriamente, começou, com decidida coragem, a estudar, além do latim e do francez, as mathematicas e a physica, afim de poder obter o diploma de bacharel em sciencias, o que conseguiu, com o seu decidido esforço e talento, em breve tempo, pois que o alcançou em 10 de novembro de 1864.

Com a mesma coragem se decidiu a obter o grau de licenceado em sciencias physicas; frequentou, com esse fim, o laboratorio de WURTZ, afim de realisar trabalhos de chimica organica, e o de PISANI, para estudar especialmente a analyse chimica mineral. Os primeiros vestigios d'este tirocinio são a analyse das areas de Cabo-Verde, a que nos referimos como premicia do seu labor, e a sua nota sobre as amylaminas. Em 18 de novembro de 1868 pôde realisar os seus exames e obter o grau de licenciado em sciencias.

No laboratorio de WURTZ continuou a trabalhar, feliz por se occupar de questões elevadas de sciencia junto de um grande mestre, quando uma noticia triste lhe fora transmittida; o seu peculio, fructo do seu trabalho em Hong-Kong, e que elle deixára lá, sumira-se nas mãos infieis, a cuja guarda o confiara. Viu-se, de repente, reduzido ao pouco que comsigo trouxera.

Foi-lhe penoso encurtar suas despezas e cingir-se a uma rigorosa economia para poder proseguir nos seus estudos favoritos; nunca o abandonára a fé n'um futuro melhor.

Quando rebentou a guerra da Allemanha com a França encontrava-se elle em Inglaterra, a aperfeiçoar-se no inglez, aproveitando a occasião de tambem visitar o laboratorios de chimica e conhecer os methodos de trabalho dos mestres das diversas nações. Voltou immediatamente a Paris; mas, por conselho dos seus amigos, decidiu-se a sahir, com magoa, e foi de novo para Londres, onde, no laboratorio do prof. WILLIAMSON, realisou com o

seu amigo **Crafts**, que tambem estudára em França, os trabalhos sobre a triethylphosphina, de que já démos conta.

Regressando a Paris depois do cerco e dos calamitosos acontecimentos da Communa, solicitou e obteve do seu já então devotado amigo e mestre **Friedel** o ser admittido no laboratorio da Escola de Minas, onde trabalhou tranquillamente e com felicidade até 1873.

N'esta data os seus recursos estavam quasi esgotados: só então se decidiu a dize-lo ao seu presado amigo, mestre e collaborador.

Como então houvesse a vaga de *chefe dos trabalhos de chimica analytica* na Escola Central pela promoção de F. **Le Blanc** a professor, **Friedel** solicitou para o seu amigo, por intermedio de **Dumas**, o logar vago; e a nomeação foi feita em breve, porque **Dumas** conhecia o valor do nosso compatriota como chimico, e a elevação do seu caracter.

A esta acção liberal e nobre, determinada por um espirito puro de justiça, e sem preoccupações mesquinhas de fronteiras e nacionalidades, se referiu n'um *toast* levantado na festa de engenheiros celebrada em 26 de outubro de 1878, na occasião da Exposição universal, pelos antigos alumnos da Escola Central, o nosso illustre patricio e chimico **Antonio Augusto d'Aguiar** (1).

Antes de encetar as suas funcções novas na Escola Central, acontecia-lhe um desastre no laboratorio de **Wurtz** onde fôra transitoriamente terminar um trabalho; ferira-se gravemente no olho esquerdo com um tubo de vidro quebrado; e as consquencias d'esse accidente foram taes, que houve necessidade de lhe fazer a ablação d'este olho. Foi operado na clinica do dr. **Wecker**, com muito soffrimento para elle, por não poder supportar a chloroformisação.

Depois occupou-se com affan da organização do ensino pratico da analyse chimica na Escola Central; e fe-lo com um completo exito. «A força de vontade e de perseverança, diz o sr. **Friedel**, e applicando os menores pormenores da sua consciencia minuciosa, conseguiu transformar do modo mais feliz os trabalhos praticos de chimica na Escola Central; e deu-lhe uma importancia e utilidade que nunca até ahi tinham tido».

---

(1) **Comberousse** (Ch. de), *Histoire de l'École Centrale des arts et manufactures*. Paris, 1879, pag. 266.

Tendo sido encarregado tambem de dirigir, para os alumnos do 3.º anno, manipulações de chimica analytica industrial, organizou estes trabalhos com o mesmo espirito pratico, e tendo sempre em vista o que era realmente util aos seus alumnos.

Não fazia só as conferencias para illucidação dos trabalhos a realisar; organizava tudo, revia os trabalhos dos alumnos, fazia de preparador e de servente, gastando n'isto muito tempo, e passando grande parte do dia na Escola.

O exito do seu ensino fôra tal que quando em 1881 se creou em Paris a Escola Municipal de physica e chimica, a commissão de organisação indicou o nome d'elle para a regencia do curso de chimica analytica na nova escola, para a qual entraram tambem Schutzenberger, director, e Henninger. Aqui temos um novo testemunho de consideração e do mais alto apreço que a sciencia franceza dava a um estrangeiro, que queria como aos seus nacionaes, e que até lhes preferia, pelas provas já dadas de zelo scientifico.

As novas funcções forçaram-no a conservar na Escola Central só o ensino pratico no 2.º anno. Mas a actividade contínua que os dois cargos lhe exigiam, e ainda, sobre tudo isto, os trabalhos de pesquizas chimicas solicitados por amigos ou discipulos seus, a quem, embora com sacrificio, não recusava um esclarecimento que dependesse do seu saber especial, ia manifestando uma influencia funesta sobre a sua saude.

Em 15 de março de 1884 escrevia-nos: «Como deverá suppôr, é-me bastante doloroso não poder entregar-me aos meus trabalhos de laboratorio e ver-me na necessidade de preparar, sem cessar, longas e contínuas lições de chimica geral, de metaes e d'analyses, de modo que nem o meu tempo nem as minhas forças quasi que bastam para o que tenho a fazer».

Já os seus amigos lhe aconselhavam a que se poupasse e moderasse os seus esforços. Conselhos baldados, porque Roberto Silva não se eximia a desempenhar os seus deveres senão com o maior zelo, solicitude e consciencia.

Tendo em 1886 vagado na Escola Central a cadeira de chimica analytica, pelo fallecimento de Le Blanc, o conselho da Escola não hesitou em designar Roberto Silva para a occupar, não obstante a alluvião de pretendentes, alguns já distinctos, que se apresentaram. D'esta subida honra tornara-se elle merecedor, diz Friedel, pelo modo como havia desempenhado as funcções

de chefe dos trabalhos de chimica analytica; pela competencia especial que lhe era reconhecida, por um trabalho sempre progessivo; e não só por isso, como ainda pela affecção e respeito dos alumnos, que elle conseguira captar pela sua dedicação.

Conforme os usos, occupou o novo e elevado logar nos annos lectivos de 1886-1887 e 1887-1888 a titulo provisorio, e com tal distincção, que foi em seguida nomeado professor titular, e portanto membro do conselho da Escola.

Tinha o nosso patricio attingido posição elevada no meio scientifico da capital franceza; estava a coberto das contingencias de trabalho modicamente retribuido; podia agora moderar os seus esforços, dedicando-se meramente ao ensino, ficando outros com a fiscalisação dos trabalhos praticos. As suas aspirações tinham sido realisades; ultrapassára talvez a meta das suas ambições; a sciencia concedera-lhe uma larga recompensa ao amor com que a cultivára; podia considerar-se feliz, e dedicar-se agora de novo a trabalhos originaes de investigação, interrompidos por força das circunstancias.

Mas... a sua saude achava-se já profundamente abalada com o excesso de tal fadiga. Chegára ao cume da montanha suspirada, e achava-se prestes a desfallecer com o esforço da ascenção. A gloria, acompanhada da independencia materiral, abraçava-o; mas parece que era um abraço precursor da morte.

Em verdade, o inverno de 1887-1888 já o abalára bastante; entretanto, com o esforço costumado, conseguira, depois de algum descanço em Biarritz, terminar as suas lições e assistir aos exames finaes dos seus alumnos. Terminados estes foi aconselhado a ir para Cauterets, nos Altos Pyreneus, donde, em 1 de setembro, me escrevia dizendo: «tenho estado doente bastante tempo n'estes ultimos tempos, circunstancia que me tem obrigado a consagrar as minhas poucas forças só ao desempenho dos meus deveres escolares, e a deixar de lado os meus proprios negocios e até a faltar ás minhas obrigações sociaes».

No dizer do sr. Friedel, a estada em Cauterets foi-lhe mais inconveniente do que util, e veiu de lá em tal estado que os seus amigos suppunham impossivel o recomeçar o seu curso de 1888-1889 e aconselharam-lhe a permanencia e descanço no sul.

Não quiz elle ouvir estes prudentes conselhos, e foi tomar posse da cadeira, de que era agora o proprietario. Que o trabalho lhe estava sendo carga pesadissima mostram-n'o os seguintes

trechos da carta que em 10 de dezembro nos escreveu: «presentemente só me posso occupar da minha correspondencia aos domingos; e dois domingos se passaram sem ter podido fazer coisa alguma, *por excesso de cansaço;* pois particularmente as lições dos sabbados são mais que laboriosas; o numero dos alumnos é de 230; o amphitheatro é immenso; é necessario levantar a voz consideravelmente, e um grande numero d'alumnos são indisciplinados». «A minha saude, diz n'outro ponto da mesma carta, tem deixado muito a desejar n'estes ultimos tempos... Sou tratado agora d'um modo racional, e tenho fé de me restabelecer; o meu maior mal é uma desnutrição, occasionada pela doença de estomago».

Como elle ignorava a gravidade do seu estado!

As ferias de Natal de 1888-1889, em vez de lhe trazerem, com o descanço relativo, algumas melhoras, parece que lhe produziram enfraquecimento mais geral de forças. Na ultima carta que me escreveu suspira por «voltar á saude e á sua antiga força»; entretanto pouco depois continuava as suas lições, mas n'um estado de abatimento tão visivel que, diz Friedel, os seus discipulos comprehendiam que estavam diante d'um moribundo, preso ao seu dever por paixão! E, quando, com a voz sumida, acontecia perguntar se o ouviam bem, os alumnos, querendo poupal-o a um desgosto, diziam que sim, não obstante só poderem ouvir-lhe as palavras os que estavam nas primeiras bancadas!

Mas este supremo esforço havia de apressar-lhe o desenlace fatal; tendo, por falta de forças, pedido que o substituissem, poucos dias restou com vida, finando-se em 9 de fevereiro ás 8 da manhã ([2]), antes mesmo de ter entrado em exercicio o substituto que fora designado!

Assim desapparecia deste mundo, diz Friedel, uma alma nobre, um homem escravo de seu dever e amante apaixonado da sciencia. Foi dura e aspera a sua carreira desde principio a fim; teve, é certo, as alegrias dos triumphadores; mas, conquistadas á custa de trabalho e esforço insano, foram alegrias ephemeras, porque a morte lh'as ceifou em breve.

Na lucta sem treguas, em que andou sempre empenhado, va-

([1]) Segundo a carta que o sr. Friedel escreveu ao sr. Antonio Feliciano Alves de Azevedo, Filhos, de Lisboa.

leram-lhe as amizades leaes e fieis que, pelas suas levantadas qualidades moraes, elle merecia, e entre as quaes se deve extremar a do sr. FRIEDEL. Valeu-lhe tambem uma fé inalteravel em Deus e na sua infinita misericordia, fé de carvoeiro, quasi infantil, que nunca o abandonou desde a mocidade até os ultimos momentos, embora sem tomar a forma de nenhum culto externo.

Sabio distincto e perfeito homem de bem, a sua perda não podia deixar de ser sentida por grande numero de pessoas para quem o seu ensino tinha sido prestimoso e a sua vida um exemplo. As suas exequias foram, em realidade, muito concorridas por amigos, collegas e discipulos; e um monumento foi elevado pelos que mais privaram com elle e mais o apreciaram, no cemiterio Mont-Parnase, onde jazem os seus restos mortaes.

II

Antes de apresentar a lista completa das suas notas e memorias, refiramos as honras e recompensas que pelo seu lavor alcançou, ás quaes, diz o sr. FRIEDEL, elle era muito sensivel, em sua extrema modestia, como o era ao menor testemunho de estima e amizade recebido daquelles que considerava como mestres.

Em 1878, depois da Exposição Universal de Paris, onde tinha desempenhado o papel de membro portuguez do jury, recebeu por decreto de 19 de outubro de 1878 o grau da Cruz de cavalleiro da Legião de Honra. Já antes d'isso o governo portuguez o condecorara com o grau de cavalleiro da Ordem de S. Thiago (carta regia de 12 de outubro de 1876).

Em 1876 foi nomeado socio correspondente da Real Academia das Sciencias de Lisboa, e socio honorario da Sociedade pharmaceutica Lusitana.

Depois de ter sido, por diversas vezes, eleito membro do conselho da Sociedade chimica de Paris, foi nomeado em 1885 vice-presidente e em 1886 presidente da mesma sociedade.

Foi sob a sua presidencia que se realisou o projecto de creação de sessões especialmente destinadas á chimica industrial, creação que tanto contribuiu para o desenvolvimento da sociedade.

Estas datas merecem ser recordadas; porque foi em 1884,

quando não podia esperar ainda as honras que lhe haviam de ser conferidas pela Sociedade, que redigiu o seu testamento, ácerca do qual a ninguem fallou e que foi encontrado depois da sua morte entre os seus papeis. Por elle legava á mesma Sociedade a sua bibliotheca; signal de quanto apreciava os serviços que a Sociedade Chimica prestava, o desejo que tinha de ainda concorrer para elles depois do seu fallecimento e o amor á sua segunda patria.

Roberto Silva seguia com bastante regularidade os congressos da *Association française pour l'avancement des sciences,* onde fez algumas communicações na secção de chimica, e foi por diversas vezes nomeado seu delegado ao conselho da associação. No congresso de 1875 em Nantes, de 1876 em Clermont-Ferrand, e em 1877 no Havre serviu de secretario; foi escolhido para no congresso de Nancy em 1876 presidir á secção de chimica, e d'este cargo se desempenhou, como dos outros, com o cuidado e dedicação costumada em todos os trabalhos de que era encarregado.

Foi delegado do governo portuguez á reunião internacional que ha annos se realisou em Paris para a protecção dos cabos submarinos, e recebeu, pouco depois, do ministerio da marinha de Portugal um chronometro com uma inscripção allusiva aos seus serviços na commissão.

Em 1885 a Academia das sciencias de Paris conferiu-lhe, pelos seus trabalhos de chimica organica, o premio Jecker, que foi repartido por elle e o sr. Prunier, cada um com 4:000 francos, e pelo sr. G. Rousseau, com 2:000 francos.

Em 1887, por carta regia de 13 de janeiro, era-lhe concedida a mercê de commendador da Ordem de S. Thiago.

Diremos, para terminar, que a noticia escripta no *Boletim da Sociedade chimica de Paris* por Friedel a respeito do nosso illustre compatriota foi traduzida em portuguez pelo sr. Antonio Nobre de Mello [1]. Devo este pormenor ao meu amigo, sr. José Augusto Macedo de Oliveira.

---

[1] Tem o titulo: *Noticia sobre a vida e trabalhos de* R. D. Silva por M. Ch. Friedel, membro do Instituto de Paris; traduzido do francez para portuguez por Antonio Nobre Mello; Lisboa, typographia do Commercio de Portugal; 1897, 1 op. in-8.º de 23 pag. Esta obra é dedicada a Roberto Duarte Silva, sobrinho do nosso biographado e com o mesmo nome que elle.

A este mesmo cavalheiro devo o conhecimento do interessante artigo, que sob o titulo de *Episodios de viagem* vai inserido nos documentos.

A *Revista illustrada*, que se publicou em Lisboa, inseriu no n.º 21 (2.º anno, 15 de fevereiro de 1890, pag. 29) um desenho do natural por Carlos Reis do tumulo de **Roberto D. Silva** no cemiterio Mont-Parnase, em Paris, acompanhada duma noticia biographica, subscripta pelo sr. **Arnaldo Fonseca** [1].

NOTAS, MEMORIAS E PUBLICAÇÕES DE ROBERTO DUARTE SILVA

1867 — Sur les ammoniaques composées à base d'amyle. *C. R.*, t. LXIV, pag. 1299; *Bull. soc. ch.*, (2), t. VIII, pag. 363.

— Sur un sable titanifère de l'île de Santiago de l'archipel du Cap-Vert. *C. R.*, t. LXV, pag. 207; *Bull. soc. ch.*, (2), t. VIII, pag. 418.

1868 — Huile de *Curcas purgans* et nouvelle source de l'alcool octylique. *C. R.*, t. LXVII, pag. 1261; *Bull. soc. ch.*, (2), t. XI, pagg. 3 e 41.

— Sur l'acide pyruvique (com o sr. Ph. de Clermont). *Bull. soc. ch.* (2), t. XI, pag. 127.

1869 — Sur quelques éthers isopropyliques: butyrate et valérate d'isopropyle. *C. R.*, t. LXVIII, pag. 1476; *Bull. soc. ch.*, (2), t. XII, pagg. 2, 3 e 113.

— Phénate et cyanate d'isopropyle. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XII, pag. 426.

— Sur quelques composés isopropyliques: succinate, benzoate, azotite et azotate d'isopropyle. *C. R.*, t. LXIX, pag. 416; *Bull. soc. ch.*, (2), t. XII, pagg. 82 e 223 e t. XIII, pag. 27.

— Sur la propylamine. *C. R.*, t. LXIX, pag. 473.

1870 — Chlorobromure de propylène (com o sr. Friedel). *Bull. soc. ch.*, (2), tom. XIII, pag. 484.

1871 — Sur l'identité du propylène chloré derivé du methylchloracetol et celui derivé du chlorure de propylène (com o sr. Friedel). *Bull. soc. ch.*, (2), t. XV, pag. 4.

— Action du chlorure d'iode sur le chloroforme (avec M. Friedel). *Bull. soc. ch.*, (2), t. XV, pag. 6.

— Action du chlore et du chlorure d'iode sur le chlorure d'isopropyle

---

[1] A *Revista illustrada* foi editada pela casa Antonio Maria Pereira, de Lisboa.

(com o sr. FRIEDEL). *C. R.*, t. LXXIII, pag. 1379; *Bull. soc. ch.*, (2), t. XVI, pag. 3 [1].

1871 — Sur l'action du chlore sur divers corps de série C^3 et sur les isomères de la trichlorhydrine (com o sr. FRIEDEL). *C. R.*, t. LXXIII, pag. 73.

— Préparation et proprietés de l'oxyde de triéthylphosphine (com o sr. J. M. CRAFTS). *Bull. soc. ch.*, (2), t. XVI, pag. 43.

1872 — Sur quelques nouveaux étheres isopropyliques: formiate et lactate isopropyliques, lactate diisopropylique, cyanate d'isopropyle. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XVII, pag. 97.

— Action du chlorure d'iode sur le chlorure de propylène a 140° en vas clos; existence de *deux propylenes chlorés isomeriques*, obtenus lorsqu'on chauffe le methylchloracetol chloré avec l'eau ou lorsqu'on traite le propylène chloré par le chlore à l'ombre; sur un éther benzoique chloré (com o sr. FRIEDEL). *Bull. soc. ch.*, (2), t. XVII, pagg. 98 e 193 [2].

— Sur un troisieme propylène bichloré (com o sr. FRIEDEL). *C. R.*, t. LXXV, pag. 81.

— Action de l'argent métallique sur le chloroiodure d'ethylène à 160° (com o sr. CH. FRIEDEL). *Bull. soc. ch.*, (2), t. XVII, pag. 242.

— Recherches sur la trichlorhydrine et ses isomères (com o sr. CH. FRIEDEL). *Bull. soc. ch.*, (2), t. XVII, pag. 386.

— Sur le chlorobromure et sur le chloroiodure de propylène (com o sr. CH. FRIEDEL). *Bull. soc. ch.*, (2), t. XVII, pag. 532.

— Action du chlorure d'iode sur le chloroforme et sur les iodures des radicaux alcooliques, et du brome sur le chloroforme (com o sr. FRIEDEL). *Bull. soc. ch.*, (2), t. XVII, pag. 537.

— Sur les isomères de la trichlorhydrine; reproduction de la glycerine (com o sr. FRIEDEL). *C. R.*, t. LXXIV, pag. 805.

— Sur les isomères de la trichlorhydrine (com o sr. CH. FRIEDEL). (Réponse a Mr. BERTHELOT). *Bull. soc. ch.*, (2), t. XVIII, pag. 7.

— Sur la préparation du diisopropyle. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XVIII, pag. 529-530.

— Sur quelques isoméries dans le groupe des composés á 3 atomes de carbone (com o sr. FRIEDEL). *Association française pour l'avancement des sciences*, congrès de Bordeaux, 1872, pag. 375.

1873 — Sur un nouvel alcool tertiaire et sur une méthode de préparation d'une série d'alcools tertiaires. *C. R.*, t. LXXVI, pag. 226.

— Réactions de la pinacone et de le pinacoline (avec M. CH. FRIEDEL). *Bull. soc. ch.*, (2), t. XIX, pag. 98.

— Acide pinacolique et dérivés (com o sr. FRIEDEL). *Bull. soc. ch.*, (2), t. XIX, pag. 146.

— Acide pivalique (com o sr. CH. FRIEDEL). *Bull. soc. ch.*, (2) t. XIX, pag. 196.

— Preparation de la pinacone (com o sr. CH. FRIEDEL). *Bull. soc. ch.*, (2), t. XIX, pag. 289.

---

[1] O chloro dá com o chloreto d'isopropylo dois chloretos; o chloreto d'iodo, aquecido em vasos fechados, com o mesmo corpo, dá um só dichloreto — o chloreto de propyleno.

[2] «O methylchloracetol $CH^3.CCl^2.CH^3$, chlorado ao sol, á sombra, ou pelo chloreto d'iodo, só fornece um trichloreto fervente a 123°, e identico ao que se forma pela fixação do chloro a 0° e á luz sobre o β-chloropropyleno $CH^3.CCl:CH^2$, que é $CH^3.CCl^2.CH^2Cl$.»

1873 — Chloruration du diisopropyle. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XIX, pag. 98.
— Action de l'acétate d'argent sur le derivé bibromé du isopropyle. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XIX, pag. 147.
— Action de l'acétate d'argent sur le chlorure du isopropyle $C^6H^{13}Cl$, em presence de l'anhydride acétique. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XIX, pag. 194.
— Alcool methylique produit dans le distillation du formiate de calcium (com o sr. Ch. Friedel). *C. R.*, t. LXXVI, pag. 1545; *Bull. soc. ch.*, (2), t. XIX, pag. 481.
— Sur l'acide pivalique et quelques sels et éthers (com o sr. Friedel). *C. R.*, t. LXXVII, pag. 48; *Bull. soc. ch.*, (2), t. XX, pag. 50.
— Synthèse de la glycerine (com o sr. Ch. Friedel). *C. R.*, t. LXXVI, pag. 1594; *Bull. soc. ch.*, (2), t. XX, pag. 98.
— Sur la pinacone et sur ses derivés (com o sr. Friedel). Congrès de Lyon, 1873, p. 273.

1874 — Dérivés du diisopropyle. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XXII, pag 50.
— Recherches sur le diisopropyle. *Association française pour l'avancement des sciences.* Congres de Lille, 1874, pag. 288.

1875 — Action des alcools sodés sur le camphre. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XXIII, pagg. 230 e 241.
— Action de l'acide iodhydrique à froid sur l'éther. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XXIV, pag. 50.
— Action de l'acide iodhydrique sur l'acétone et sur les éthers mixtes. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XXIV, pagg. 97 e 482.
— De l'action de l'acide iodhydrique a basses températures sur les éthers propement dits et les éthers mixtes. *Ann. ch. et phys.*, (5), t. VII, pag. 425 e *Assoc. française pour l'avancement des sciences.* Nantes, 1875, pag. 446. Foi tambem publicada em portuguez no *Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes*, t. V, n.º XIX; Lisboa, 1876, pagg. 168–174.

1876 — Action de l'acide iodhydrique sur l'oxyde méthyléthylique. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XXV, pag. 529.

1877 — Synthèse de l'isopropylbenzine. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XXVIII, pag. 529.
— Sur quelques composés benzyliques et anisiques. *Assoc. franç. pour l'avanc. des sciences.* Havre, 1877, pag. 374.

1878 — Action de l'acide iodhydrique sur l'acétal méthylique de l'aldéhyde benzoique. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XXIX, pag. 145.
— Methylisopropylbenzine obtenue par l'action du chlorure d'isopropyle sur le toluène en présence du chlorure d'aluminium. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XXIX, pag. 193.

1879 — Synthèse du diphénylpropane. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XXXI, pag. 2.
— Sur la synthese d'un phénylpropane et sur un nouveau mode de formation du dibenzyle. *C. R.*, t. XXXIX, pag. 606.

1880 — Synthèse du diphényldiméthylmethane par le méthylchloracétol et la benzine, cumène, etc. *Bull soc. ch.*, t. XXXIV, pag. 674.

1881 — Sur la constitution de l'éther glycérique et sur la tranformation de

l'épichlorhydrine en alcool propylique normal. *C. R.*, t. XCIII, pag. 418. Foi tambem publicada em portuguez no *Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes*, t. IX, n.º XXXIII; Lisboa, 1882.

1881 — Action du propylène monochloré sur la benzine. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XXXV, pag. 289.

— Produits formés au même temps que le dibenzyle par la méthode au chlorure d'aluminium. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XXXVI, pagg. 1 e 24.

— Diphényléthane et éthylbenzine. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XXXVI, pag. 66.

— Action de l'acide iodhydrique sur le chloroiodure de propylène et sur le chlorure d'isopropyle. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XXXVI, pag. 643. Foi tambem publicada em portuguez no *Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes*, t. IX, n.º XXXIII; Lisboa, 1882.

1882 — Sur la transformation de la glycerine en alcool propylique normal. *Assoc. franç. pour l'avanc. des sciences*. La Rochelle, 1882, pag. 267.

— Lettre à M. Dumas sur les laboratoires et l'enseignement pratique de la chimie. *Ann. ch. et de phys.*, (5), t. XXVII, pag. 525; e *Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes*, t. IX, n.º XXXV; Lisboa, 1883.

1884 — Synthèse du diphényléthane par le chlorure d'éthylidène. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XLI, pag. 448.

1885 — Production de quelques hydrocarbures aromatiques: isopropylbenzine, isopropyltoluène. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XLIII, pag. 317.

— Substance huileuse accompagnant l'éther glycerique. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XLV, pag. 354.

— Sur un acide provenant de l'action du chlorure de chaux sur l'alcool allylique. *Assoc. franç. pour. l'avanc. des sciences;* Grenoble, 1885, I, pag. 111.

1886 — Dosage volumetrique du zinc, du cadmium, du colbat, du nickel et du cuivre. *Assoc. franç. pour l'avanc. des sciences;* Nancy, 1886, I, pag. 110.

1887 — Analyse du minium. *Assoc. franç. pour l'avanc. des sciences.* Toulouse, 1887, I, pag. 205.

— Sur le dosage du zinc par le procédé de Weil. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XLVII, pag. 481.

— Sur les travaux d'Ad. Perrot. *Bull. soc. ch.*, (2), t. XLVII, pag. 657.

DOCUMENTOS

N.º 1

Certidão de idade

Julio José Delgado, parocho encommendado da freguesia de Nossa Senhora do Rosario na ilha de Santo Antão de Cabo Verde.

Certifico, e juro *in verbo sacerdotis* que vendo o livro 2.º do registo parochial de baptisados d'esta freguesia, nelle encontrei o termo seguinte: aos vinte e sete de março de mil oitocentos e trinta e sete, eu o vigario d'esta egreja matriz baptisei e puz os santos oleos a Roberto que nasceu a vinte e cinco de fevereiro, filho legitimo de Francisco José Duarte e Mathilde Rosa da Silva, naturaes d'esta ilha: foram padrinhos Joaquim José Oliveira por procuração de João Hypolito d'Almeida, e Francisca Ferreira Monteiro, natural da Boa-Vista. E para constar fiz este termo que assigno. Santo Antão era *ut supra*. as. O vigario, *Ricardo João de Brito*. E nada mais se continha no dito termo que bem e fielmente copiei do original ficando competentemente averbado.

Ilha de Santo Antão de Cabo Verde, 2 de setembro de 1906.

(a.) *P.º Julio José Delgado.*

N.º 2

Certidão do exame de pharmacia na Escola Medico Cirurgica de Lisboa, em 1857

Pedro Antonio Bettencourt Raposo, Lente e Secretario da Escola Medico-cirurgica de Lisboa, etc.

Certifico que a folhas 45 do livro 2.º dos termos dos exames dos praticantes pharmaceuticos consta que Roberto Duarte Silva, filho de Francisco José Duarte, natural da Ilha de Santo Antão de Cabo Verde, fez no dia vinte e um de março de mil oitocentos cincoenta e sete exame de pharmacia e ficou approvado plenamente com louvor.

Secretaria da Escola Medico cirurgica de Lisboa, 11 de outubro de 1905.

(a.) *Pedro Antonio Bettencourt Raposo.*

N.º 3

Relatorio do sr. professor L. Troost, membro do Instituto, apresentado á Academia das sciencias de Paris, por parte da sua secção de chimica, sobre os trabalhos de Roberto Duarte Silva (1 de abril de 1886)

Os primeiros trabalhos do sr. R. D. Silva, chefe do Laboratorio de Analyse geral da Escola Central, datam de 1867.

Tiveram por objecto a producção simultanea dos ammoniacos compostos

do alcool amylico, a formação da propylamina normal e a preparação do oxydo triethylphosphina.

Seguidamente preparou grande numero de etheres do alcool isopropylico, confirmando assim a funcção alcoolica d'este primeiro alcool secundario.

Fazendo reagir o acido iodhydrico gazoso sobre os etheres propriamente ditos e sobre os etheres mixtos, o sr. Silva conseguiu fixar as regras geraes d'esta acção que, com os etheres propriamente ditos, dá equivalentes eguaes de alcool e de ether iodhydrico correspondente, e, com os etheres mixtos, produz o alcool do radical mais carbonado e o ether iodhydrico do radical menos rico em carbono.

A utilisação do mesmo reagente permittiu lhe resolver um problema até então estudado sem exito por um grande numero de chimicos, e que é o da transformação da glycerina em alcool propylico normal.

Com o methodo geral de synthese dos srs. Friedel e Crafts, obteve muitos carbonetos aromaticos interessantes, taes como o cumeno, o cymeno, o dibenzylo, dois diphenylpropanos isomericos, etc.

Foi, emfim o sr. Silva, durante muitos annos, collaborador dedicado do seu mestre e amigo o sr. Friedel, em numerosos e importantes trabalhos, entre os quaes apenas citaremos a synthese total da glycerina e a descoberta de um acido. isomerico do acido valerico, e identico ao acido trimethylacetico do sr. Boutlerow.

A actividade do sr. Silva tem-se conservado sempre a mesma durante dezoito annos; e a secção de chimica (da Academia das Sciencias de França), considera um dever dar-lhe uma demonstração do seu grande apreço por seus interessantes trabalhos e pela sua perseverança em estudos tão variados.

N.º 4

Noticia publicada no *Interesse Publico* com o titulo — O chimico portuguez Roberto Duarte Silva

A proposito da candidatura á cadeira de analyse chimica da Escola central de artes e manufacturas de Paris, canditatura d'este nosso benemerito concidadão e chimico distinctissimo, cujo nome illustre é uma honra para Portugal, tão pobre de sabios — e de chimicos — seja dito entre parenthesis, e emquanto não publicamos a biographia d'este sabio portuguez, que mantem com tanto relevo, no estrangeiro, os nossos creditos scientificos, tão decadentes entre nós, por falta de uma conveniente organisação do nosso ensino superior e experimental, damos com o maior prazer, sobre aquelle nosso compatriota, as informações seguintes:

O sr. R. D. Silva é hoje chefe do laboratorio de analyse geral na Escola central de artes e manufacturas e professor de analyse chimica na Escola de physica e de chimica industriaes da cidade de Paris.

A proposito dos seus trabalhos o notabilissimo chimico o sr. Troost, n'um parecer lido á Academia das sciencias de França e publicado nos seus *Comptes-rendus* de 21 de dezembro de 1885, declara o seguinte:

(*Segue o relatorio do prof.* Troost, *já inscrido no doc. n.º 3*)

Acrescentaremos que, por proposta da respectiva secção de chimica, o Instituto de França concedeu ao nosso illustre compatriota na sua sessão publica annual de 21 de dezembro de 1885 um premio de 4:000 francos, deduzido das verbas do premio Jecker do mesmo anno.

Dando noticia d'estes factos, tão gratamente lisongeiros para os que amam a sua pátria, perguntamos apenas: — A este portuguez, tão obscuro entre nós quanto illustre lá fóra, a este homem, o unico que hoje representa

no estrangeiro, com verdadeiro e indiscutivel brilho, a sciencia portugueza, a este concidadão benemerito, a quem Portugal não poude crear uma situação proporcionada ao seu talento e justificada pelos seus serviços, que testemunhos de apreço e reconhecimento temos nós dado até hoje?

Nenhuns ou bem poucos, provavelmente...

Embora o sr. SILVA, na alta posição social e scientifica, que occupa em Paris, não precise, é claro, para engrandecer-se, das veneras e fitas portuguezas, julgamos no entanto que, n'uma epocha em que tantos as usam, por toda a parte, descarada e descabelladamente, sem o menor titulo de recommendação que as justifique, seria digno e decente — e honroso para Portugal — que os nossos governos deixassem de vez em quando o triste costume, em que se poseram, de só condecorarem quasi sempre quem pede semelhantes distinctivos ou quem possa .. retribuil os prompta e largamente.

O sr. R. D. SILVA é irmão de um distinctissimo pharmaceutico de Cabo-Verde o nosso particular amigo, o sr. Antonio Duarte Silva (1).

(De *O Interesse Publico*, de 6 de julho de 1886).

N.º 5

Apontamentos biographicos sobre ROBERTO DUARTE SILVA, publicados na *Revista Intellectual Contemporanea*, sob o titulo — Um sabio portuguez, ROBERTO DUARTE SILVA — e transcripto no *Jornal da Sociedade pharmaceutica lusitana* de maio de 1888

Entre os portuguezes que, por assignalado merito e por importantes trabalhos scientificos, honram a patria e não a deixam entre estranhos esquecida e ignorada, citaremos o nosso illustre chimico e celebrado professor parisiense o sr. ROBERTO DUARTE SILVA.

Não pretendendo fazer uma biographia d'este nosso illustre compatriota, porque nos escasseiam elementos para isso, limitamo-nos a alguns apontamentos, ha pouco obtidos de um amigo e collaborador nosso.

Nasceu o sr. ROBERTO DUARTE SILVA em 25 de fevereiro de 1837, na villa da Ribeira Grande, ilha de Santo Antão, sendo seus paes os srs. Francisco José Duarte e D. Mathilde Rosa Silva.

Tinha o nosso distinctissimo patricio dez annos, quando o seu pae o entregou á direcção de um habil pharmaceutico, recentemente estabelecido em Santo Antão, para praticar na sua pharmacia.

Esse homem honrado e bondoso, que tanta influencia devia ter na vida do futuro chimico, era Antonio Gonçalves de Almeida Rhino.

Logo se distinguiu o novel praticante por um incansavel desejo de saber, e um aturado amor ao estudo e, apesar da sua tenra edade, por relevantes serviços prestados durante uma epidemia.

Almeida Rhino, que presentia um brilhante futuro para o seu protegido, mandou-o estudar a Portugal (1854). Esta viagem satisfazia decerto uma das muitas aspirações do estudioso mancebo, retemperava-o de forças e de coragem para continuar na sua carreira, depois do crudelissimo golpe que o ferira profundamente, a morte de seu pae.

---

(1) É auctor deste artigo o fallecido lente de chimica da Escola Polytechnica de Lisboa, dr. JOSÉ JULIO RODRIGUES.

Chegado a Lisboa, Roberto Silva residiu na pharmacia da viuva Rhino, e seguiu os seus estudos theoricos debaixo da direcção do conhecido pharmaceutico João José de Sousa Telles.

Um anno apenas, depois de saír de Santo Antão, falleceu alli o seu protector que o não esquecera, contribuindo — *post-mortem* — para a continuação dos seus estudos, como ultima lembrança de amizade.

Depois de estudar ainda na pharmacia dos srs. Antonio Feliciano Alves d'Azevedo & Filhos, fez com distincção em 1858 (1), o seu exame pharmaceutico, merecendo os louvores do jury, no acto do exame.

Se, porém, uma carreira honrada e um futuro certo sorriam ao distincto moço, era ferido de novo, no mais das suas affeições, pelo fallecimento de sua mãe, que uma epidemia de cholera, dizimando a gente de Santo Antão, ceifara longe d'elle.

Vamos agora encontrar o nosso biographado em Macau, onde se demora tres annos, e em seguida estabelecido em Hong-Kong, de sociedade com um medico francez. Ahi, se um desmedido trabalho lhe permittiu adquirir uma pequena fortuna, uma pertinaz doença, filha do mesmo trabalho, obriga-o dois annos depois, em 1862, a regressar a Portugal.

Na China, Roberto Duarte Silva adquiriu muitos amigos entre os francezes que andavam n'esse tempo em Hong-Kong e, por instancias de alguns d'elles, passou a França, pouco tempo depois da sua chegada a Portugal.

Em Paris, n'esse grande centro onde tanto abundam os meios de instrucção e de aperfeiçoamento, Roberto Duarte Silva prosegue com ardor nos seus estudos favoritos. Estuda com Wurtz, Langlebert e Dorvault, adquirindo geral estima e muita consideração como homem de sciencia e de futuro. Nada é capaz de desviar o illustre moço dos seus estudos predilectos — nem os seus negocios particulares, nem a perda de uma parte das suas economias, sepultadas nos azares d'uma casa de commercio ingleza. Em breve obtem o grau de licenciado em sciencias, e pouco depois é nomeado chefe dos trabalhos de analyse chimica da Escola de artes e manufacturas, e professor da cadeira de chimica e physica industriaes da municipalidade de Paris. Desde então a sua carreira scientifica, como professor e como chimico, tem sido das mais distinctas.

Como professor, tem a palavra extremamente facil e sempre correcta, tornando-se notavel a sua facilidade de allocução elegante e graciosa. Como chimico, entregamos a sua apreciação ao distinctissimo sabio francez o sr. Troost que, n'um parecer lido á Academia das sciencias de França e publicado nos seus *Comptes-rendus* de 21 de dezembro de 1885, declara o seguinte:

(*Segue o relatorio inserido no doc. n.º 3*)

Foi em Paris, no decurso dos seus trabalhos, que uma violenta explosão fez perder ao illustre experimentador o uso de um olho.

Os francezes têm distinguido o nosso compatriota: é membro da Sociedade chimica de Paris e da Sociedade franceza para o adiantamento das sciencias.

A patria tambem não o tem esquecido: é socio correspondende da Academia Real das Sciencias e socio honorario da Sociedade Pharmaceutica Lusitana.

Ha dias foi agraciado com o grau de commendador da Ordem de S. Thiago.

Das suas qualidades particulares diremos que, como filho, era a gloria

---

(1) Foi approvado com louvor no exame de pharmacia em 21 de março de 1857.

e satisfação de seus paes, que teve a infelicidade de perder tão cedo, mantendo-se intacto o culto e respeito pela sua memoria: como irmão foi sempre dedicado e extremoso, devendo-lhe a educação o sr. Antonio Duarte Silva, hoje distincto pharmaceutico em S. Vicente.

Como homem distingue-se pela sua honradez e probidade de caracter, pelo seu trato agradavel, e pelo tom variado da sua conversação insinuante e instructiva, reflexo de uma brilhante intelligencia e de uma solida instrucção.

E, com todos estes distinctissimos dotes e qualidades, affirma o sr. R. D. Silva um talento de primeira grandeza, um trabalho constante e meritissimo, um coração limpo e uma consciencia de homem de bem ([1]).

(*Revista intellectual contemporanea*, n.º 6, pagg. 46 a 48: publicação adstricta ao jornal *O interesse publico*, 1886).

N.º 6

Noticias sobre a morte de Roberto Duarte Silva

1

Por um telegramma recebido de Paris pelo nosso amigo senhor José Julio Rodrigues, teve-se em Lisboa a triste noticia do fallecimento de Roberto Duarte Silva, professor de chimica analytica na Escola central de Paris e um dos portuguezes que mais têem honrado no estrangeiro a nossa patria pelo seu trabalho, pelo seu talento, pela sua probidade e pela sua perseverança.

Homem bom e homem de bem, Roberto Duarte Silva, occupava um logar proeminente na sciencia chimica e seria de certo em poucos annos membro do Instituto de França, se a enorme fadiga, a que se não poupava, para ser um professor modelo e um verdadeiro sabio, o não tivesse tão cedo roubado á estima universal e ao affecto de seus amigos. D'elle dizia ha poucos mezes o eminente professor Schloesing, que no seu rosto e no seu porte se poderia ver e apreciar o homem perfeitamente probo.

Que a memoria do nosso eminente patricio seja sempre acompanhada na patria que elle sempre acarinhou, pela estima de todos nós que n'elle encontrámos, por tão largos annos, um estimulo e um exemplo tão digno de imitação e de registo.

Brevemente será publicada uma biographia d'este homem eminente, honra do nome portuguez.

(*Diario de Noticias*, de 11 de fevereiro de 1889, sob o titulo *Morte dum portuguez illustre*).

2

Por noticia telegraphica, recebida ante-hontem em Lisboa, soube-se que falleceu em Paris o notavel chimico sr. Roberto Duarte Silva, professor da cadeira de analyse chimica na Escola central d'aquella cidade, onde suc-

---

[1] É tambem auctor d'este artigo o mesmo prof. dr. José Julio Rodrigues.

cedera ao celebre M. DUMAS e para concorrer á qual tivera que naturalisar-se cidadão francez.

Era o illustre homem de sciencia uma das mais distinctas individualidades do professorado scientifico moderno, sendo altamente considerado e respeitado entre os seus collegas, não só pelos seus brilhantes talentos, mas tambem pelas suas apreciaveis qualidades como homem trabalhador, esclarecido e honesto.

O sr. ROBERTO DUARTE SILVA nascera na ilha de Santo Antão, do archipelago de Cabo Verde, onde ainda tem parentes. Ha muitos annos que vivia em França, onde estabelecera um laboratorio, tendo conquistado cedo a mais honrosa reputação pela importancia e alcance dos seus estudos e dos seus trabalhos.

No seu entranhado amor pela sciencia, o sr. ROBERTO DUARTE SILVA soffrera as maiores privações, luctando com sérias difficuldades para fazer a sua carreira.

Agora que o logar de professor lhe assegurava um certo bem estar relativo, a morte veio surprehendel-o, inutilisando o glorioso futuro que o esperava e que, felicitando-o a elle, daria novo lustre ao nome portuguez.

O sr. ROBERTO DUARTE SILVA fôra agraciado ha dois annos pelo governo portuguez, por honrosa sollicitação do sr. conselheiro Henrique Macedo, com a commenda da Ordem de S. Thiago. O anno passado o sr. conselheiro Marianno de Carvalho, penhorado por alguns serviços valiosos pelo benemerito professor prestados ao nosso paiz, offereceu-lhe, por intermedio do sr. conselheiro José Julio Rodrigues, um bello relogio de ouro com um monogramma e dedicatoria.

Estes simples factos provam como o illustre professor era considerado e estimado pelos seus collegas de Portugal. Tanto o sr. Henrique de Macedo, como os srs. Marianno de Carvalho e José Julio Rodrigues, são lentes da Escola Polytechnica de Lisboa. O nosso mallogrado amigo sr. conselheiro Antonio Augusto d'Aguiar, outro eminente professor, tambem tinha em grande conta o notavel chimico, com cuja amizade se honrava.

O sr. ROBERTO DUARTE SILVA tinha apenas 52 annos d'idade e morreu pobre.

A sua morte deve ter causado profunda impressão em Paris, onde o illustre portuguez era muito considerado e estimado, como é sentida sinceramente em Portugal por quantos o conheciam e admiravam.

O governo ordenou telegraphicamente á legação portugueza em Paris que se fizesse representar no sahimento.

(*Commercio de Portugal*, de 12 de fevereiro de 1889).

3

Depois de uma noticia, em que se reproduzem os factos constantes da anterior, lê-se o seguinte:

O conselheiro José Julio Rodrigues parece que vae escrever uma longa biographia do erudito professor. Mais se diz que o governo ordenará o levantamento de um mausoleo no sitio onde o cadaver descança.

Aos seus os nossos pezames de amigo e de portuguez.

(*Correio de Portugal*, de 23 de fevereiro de 1889).

N.º 7

Homenagem da Sociedade Pharmaceutica Lusitana

A Sociedade Phamaceutica Lusitana resolveu encerrar, após a leitura da acta, a sua sessão de hontem, em signal de sentimento pela morte do pharmaceutico Roberto Duarte Silva, o eminente chimico e professor ha pouco fallecido em Paris.

Este benemerito era socio da sociedade e estava em intimas relações com ella, enviando lhe sempre os seus notaveis trabalhos de chimica.

(*Diario de Noticias*, de 14 de fevereiro de 1899).

N.º 8

Discurso proferido por C. Friedel, do Instituto de França, perante o feretro de R. D. Silva, em 11 de fevereiro de 1889

(Traducção)

Meus senhores: Se obedecesse apenas aos dolorosissimos sentimentos e ao profundissimo luto que me domina e prende em face d'este tumulo, deveria conservar-me silencioso. A memoria, porém, do amigo dedicado, que perdi, impõe-me a obrigação de patentear a quantos o conheceram e estimaram, a todos os seus amigos, quanto elle era digno de affecto e de respeito pela elevação dos seus sentimentos, pela honestidade do seu espirito, pelo seu culto e obediencia a todos os preceitos do dever. Testemunha de metade da sua existencia, seu collaborador e seu amigo, a tanto devo o conhecel-o mais que muitos outros e o apreciar, por isso mesmo, mais intimamente a sua alma tão altiva quanto modesta, e cujos soffrimentos intimos eram, não raro, escondidos ainda aos seus mais queridos e predilectos.

Silva, em verdade, não foi feliz, a despeito de triumphos grangeados por um trabalho obstinado, mantido por uma vontade inflexivel, a despeito mesmo de amigos fieis, que o acompanharam até ao seu ultimo suspiro.

Nascido em Santo Antão, uma das ilhas de Cabo Verde, de que ainda ha pouco fallava entre soffrimentos e cansaços, consequencia de uma doença rebelde, com o enthusiasmo e a poesia que envolvem as recordações da mocidade e as saudades do paiz natal, estudou em Lisboa, estabelecendo-so mais tarde na China, onde passou quatro annos como pharmaceutico.

Estava ainda n'esse paiz quando se realisou a nossa expedição ali; e, em momentos em que ao nosso exercito faltaram medicamentos indispensaveis, taes serviços lhe prestou e com tão largo desinteresse, que desde logo teve e obteve por amigos, que sempre o foram depois, os facultativos militares, com quem d'esta arte se relacionou.

Mais tarde, impellido e dominado por um ardente amor pela sciencia, bebido principalmente na leitura das obras de Dumas, grangeados os meios que cuidava necessarios para o exito de seus projectos, vem a Paris — aprender.

Corria então o anno de 1863. E muito tinha que aprender, com effeito, começando pela lingua do paiz que procurára.

Não era, porém, homem que desanimasse; e, a breve trecho, fazia os seus exames de bacharelado e os de licenciado em sciencias physicas. Frequentou o laboratorio de Wurtz, onde o encontrei pela primeira vez, prendendo-me logo pelo seu ar sério e dedicação pelo estudo, e depois o laboratorio de Pisani.

Em 1867 publicou o seu primeiro trabalho original, seguido depois de muitos outros.

Não me cumpre analysal-os aqui, nem é este, para tal fim, o logar mais proprio; direi sempre, todavia, que todos revelam o mesmo escrupulo no estudo e grangearam para o seu auctor a intima satisfação, que é a primeira recompensa de quem investiga.

O alto apreço em que os teve a Academia das sciencias da França, concedendo a R. D. Silva o premio Jecker, a eleição d'este para presidente da sociedade chimica de Paris, a sua nomeação de membro correspondente da academia das sciencias de Lisboa e as distincções honorificas que lhes foram concedidas pela França e por Portugal, patenteiam bem claro o valor em que foram tidos por juizes competentes os trabalhos d'aquelle distinctissimo professor. Posso bem asseverar-vos que elle era então feliz, na plenitude da sua actividade scientifica, durante uma collaboração, que durou tres annos, e que ainda mais estreitou os laços que já nos prendiam.

Na febre de trabalho fugiu-lhe, porém, a modesta fortuna que possuia, malbaratada por infieis depositarios; e, conjunctamente, um triste fracasso de laboratorio, depois de o ter affectado, grave e dolorosamente, por muito tempo, teve como resultado a perda de um dos olhos.

Esvaída a possibilidade de uma vida desafogada, ás suas investigações scientificas tornava-se mister, d'ora avante, associar o trabalho com que assegurasse o pão de cada dia. Tendo vagado por essa occasião um logar de chefe dos trabalhos de chimica analytica na Escola central foi Silva quem o obteve.

Poder-se-ia suppor a principio que lhe fossem compativeis os encargos de sua posição official e os seus trabalhos scientificos anteriores, e assim succedeu na verdade até certo ponto.

A exagerada delicadeza, porém, da sua consciencia, não lhe permittiu, quasi em seguida, que distrahisse a sua attenção para assumptos que não fossem os das suas conferencias profissionaes de chimica analytica e os das manipulações que se lhes referiam, tudo accumulado com o exame e correcção dos relatorios manuscriptos dos alumnos sobre as analyses que lhes eram incumbidas.

Comtudo era grande o seu desgosto por se conservar affastado das suas investigações e pesquizas. Aspirava a recomeçal-as.

Não consentiu, porém, o destino que o fizesse por absoluta impossibilidade material, ou apenas lhe forneceu o ensejo por que aspirava, quando as forças e a saude lhe eram já, para isso, de todo insufficientes.

Organizára por forma tão correcta o ensino da analyse chimica na Escola central que, ao instituir-se a Escola municipal de chimica e de physica, foi logo indigitado o seu nome para professor de chimica analytica. E por tres annos amplamente satisfez a este duplo encargo com zelo egual, e nunca desmentido, em qualquer d'aquelles institutos.

A trabalho tão excessivo correspondeu, porém, quasi que a ruina da sua já tão precaria saude.

Vagando mais tarde, em 1886, a cadeira de chimica analytica da Escola central, o conselho d'esta escola escolheu a Roberto Duarte Silva para a reger em tirocinio.

Entregue de corpo e alma a este novo serviço, resignou, para melhor o cumprir, o seu posto na Escola de chimica e de physica; e, ao ser, dois

annos mais tarde, nomeado lente cathedratico d'aquelle curso, deviam ficar de certo com isso satisfeitas as suas tão legitimas aspirações!

Triste fatalidade, porém! O premio de tantos e tão porfiados sacrificios e trabalhos chegára tarde. A saude, quasi extincta, reclamava os maximos cuidados.

Procurando melhorar em Cauterets, onde se tratou durante as ultimas ferias, reappareceu-nos tão doente e alquebrado, que nós, os seus amigos a nós mesmos nos perguntavamos se seria possivel que Silva fizesse, n'aquelle estado, a sua primeira lição.

Porque, é preciso dizer-vos: Silva nunca permittiu que lhe fallassem em viagens que obstassem á regencia dos seus cursos, nem de substituição provisoria aos seus encargos officiaes.

Com surpreza de todos, no entanto, substituindo-lhe as forças physicas quasi perdidas o vigor do seu espirito, logrou desempenhar-se de suas obrigações escolares até fins de dezembro findo, apparentemente mais vigoroso que nos primeiros dias do seu ultimo curso. Em seguida, porém, a breves dias de repouso, durante o qual se nos afigurava mais abatido que antes, deu ainda algumas lições, espacejadas pela benevolencia da direcção da Escola central, lições escutadas com emoção por seus discipulos, que, em presença do seu mestre, para elles bem proximo da morte, piedosamente dissimulavam a difficuldade que sentiam para ouvil-o. E ainda não ha 15 dias que Silva proferiu a sua ultima lição, sabe Deus á custa de que enormes e não confessadas fadigas?...

Silva morreu, pois, sobre a brecha, sacrificando a sua vida ao cumprimento do seu dever.

Se alegrias houve na sua existencia, tão dignamente preenchida, exceptuando as que lhe resultaram de ser justamente apreciado pelos que amava e admirava, foram ellas, apenas, as alegrias austeras do sacrificio, do trabalho, da dedicação, do dever cumprido até o seu extremo limite, alegrias filhas de serviços sempre generosamente distribuidos por todos quantos tiveram a fortuna de conviver com elle.

N'elle havia ainda, para que taes e tão intimas satisfações podessem prevalecer a todas as outras, um profundo sentimento religioso que, sem o prender a qualquer culto externo, o amparou sempre nos seus soffrimentos, e lhe fez constantemente antever para além da vida terrestre, como que o *desideratum* e o premio da lucta que acompanha e attribula a triste vida humana.

Descança, agora, no eterno repouso, esse trabalhador illustre, legando-nos a todos um grande exemplo e as mais profundas saudades.

N.º 9

Noticias sobre os obsequios funebres em honra de Roberto Duarte Silva

1

O enterro d'este nosso sabio compatriota verificou-se em Paris no dia 11, sendo os officios funebres resados na egreja de Saint-Severin, ao meio dia. Presidiu ao sahimento o sr. Friedel, membro do Instituto de França e intimo amigo do finado, e acompanharam-n'o as primeiras summidades das escolas de Paris. A Escola polytechnica de Lisboa fez-se representar na triste cerimonia.

..

Os convites da parte de sua familía e de seus amigos enumeravam os seguintes titulos do eminente e deplorado conterraneo, que se fez francez para melhor servir a sciencia e o seu paiz: ROBERTO DUARTE SILVA, professor de chimica analytica na Escola central de artes e manufacturas, antigo professor de chimica na Escola municipal de physica e de chimica da cidade de Paris, antigo presidente da Sociedade chimica de Paris, membro da Academia das sciencias de Lisboa, etc.: cavalleiro da Legião de Honra, commendador da Ordem de S. Thiago de Portugal, etc., fallecido em 9 de fevereiro de 1889, em uma casa na rua Thenard, 6, na edade de 51 annos.

O enterro foi no cemiterio do Mont Parnasse.

(*Diario de Noticias*, de 15 de fevereiro de 1889, sob o titulo ROBERTO DUARTE SILVA).

2

Publicamos em seguida a traducção do eloquente e sentidissimo discurso, pronunciado pelo celebre chimico francez, o sr. CH. FRIEDEL, junto do tumulo do nosso mallogrado compatriota, e em presença das maiores summidades do professorado e da sciencia franceza. A posteridade, que principiou para aquelle portuguez illustre, «que deixou á França um grande exemplo e profundissimas saudades», faz-lhe desde já a justiça, a que tinham jus o seu grande merito e o seu purissimo caracter. É mister, porém, que se não regatêem agora ao portuguez benemerito, que tanto está honrando, ainda — *post mortem* —, o paiz em que nasceu, as homenagens a que tem jus.

Que Portugal lhe erija o tumulo, onde repousa, já que não soube ou não poude aquilatal-o sufficientemente em vida.

É uma divida a que urge immediato pagamento, e confiamos do alto patriotismo e illustração do sr. Barros Gomes, que o fará, como é dever nosso e na conformidade do sentimento publico, que o applaude e o requer.

(*Segue o discurso de* FRIEDEL, *que é o doc. n.º 8*).

(*Diario de Noticias*, de 21 de fevereiro de 1889, sob o titulo — *Um portuguez benemerito,* ROBERTO DUARTE SILVA).

N.º 10

Homenagem prestada pela Camara Municipal do concelho da Ribeira Grande, da Ilha de Santo Antão, á memoria de ROBERTO DUARTE SILVA

A Camara municipal do concelho de Santo Antão acaba de honrar-se, reunindo em sessão extraordinaria apenas ali constou o passamento do seu conterraneo o sr. ROBERTO DUARTE SILVA, fallecido em Paris, onde honrou sempre a nação e engrandeceu o seu nome, que era respeitado e considerado por todos os que estudam e trabalham.

Orgulhando-nos de ver como a Camara municipal se ennobreceu, publicamos em seguida a acta d'aquella sessão. Corre-nos o dever de registrar

aqui a ultima homenagem prestada pela ilha de Santo Antão ao seu filho dilecto e benemerito.

Acta

Anno do Nascimento de N. S. Jesus Christo de 1889, aos 16 dias de fevereiro, n'esta villa D. Maria Pia, da ilha de Santo Antão e sala das sessões da Camara municipal, presentes os srs. Joaquim Ignacio Ferreira Nobre, presidente; Antão Victorino Ferreira, Antonio José de Lima, Jeão Zacharias de Mello e Aurelio Antonio Martins, bem como o sr. administrador do concelho Francisco Tavares d'Almeida comigo Diocleciano Nobre, escrivão da administração do concelho, no impedimento do respectivo.

Aberta a sessão pelo sr. presidente, foi dito que acabava de ter a noticia do fallecimento de Roberto Duarte Silva, facto que teve logar em Paris no dia 9 do correate; que o illustre morto era natural d'esta ilha, um dos seus filhos mais dilectos, e um d'aquelles que mais a tinham ennobrecido, pela eminencia da sua posição social e pelo seu altissimo valor scientifico; que elle presidente não pretendia fazer o elogio funebre de um cidadão tão notavel, mas não podia deixar de referir alguns factos da sua vida gloriosa para justificar assim o seu proposito; que ninguem visse nas suas palavras outro sentido que não fosse o de fazer justiça, e que nem podia haver vaidade nem lisonja perante a fria pedra tumular; que nunca era demais o preito e a homenagem a memoria dos homens illustres, e aquelle de que está tratando tinha todos os predicados para se impôr ao respeito e a veneração publica; que as portas de um tumulo eram sempre as portas da historia, e que esta havia de ser justa nas apreciações d'aquelle que já agora era um vulto seu.

Elle presidente ia dizer o que era do conhecimento de todos, mas não queria que se suppozesse que ficando callado se esquecia em momento tão solemne d'um compatriota tão distincto; que foi a custa do trabalho nobre e honrado, servindo o seu paiz com elevada intelligencia, que Duarte Silva poude alcançar os meios de fortuna, indispensaveis para completar a sua educação scientifica; e foi em Paris, onde tudo é grande e nobre, que elle desvendou os segredos e os mysterios da sciencia, applicando-se principalmente ao estudo da chimica em gue chegou a ser um sabio admirado e respeitado por todos os homens notaveis nacionaes e estrangeiros, em cujo numero, e como um dos mais fanaticos admiradores, se encontrava uma das mais elevadas capacidades do nosso paiz o grande estadista, o eminente parlamentar, o distincto professor Antonio Augusto de Aguiar, cuja perda ha de ser sempre geralmente sentida. N'estas condições, elle presidente, parecendo-lhe interpretar bem o sentimento da camara, era de opinião que esta sessão, a primeira depois da noticia de que dá conhecimento, fosse inteiramente consagrada á memoria do glorioso patricio, como preito e homenagem a sua honestidade e ao seu saber; que para honrar o seu nome lhe bastava a immortalidade da historia, cujas portas se lhe acabavam de abrir, mas elle presidente entendia que era preciso mostrar ao mundo civilisado que os povos d'esta ilha sabem venerar a memoria dos filhos que ennobreceram a sua patria, e assim propunha:

1.º Que se lançasse na acta um voto de profundo sentimento pela irreparavel perda d'um compatriota tão distincto.

2.º Que se promovesse por todos os meios adequados uma subscripção publica para erigir um monumento em honra do seu nome, ou para obter a trasladação do seu cadaver, encerrando-o em tumulo condigno, satisfazendo assim um dos seus ultimos desejos.

3.º Que se levantasse a sessão em signal de luto e em homenagem ao illustre finado.

4.º Finalmente que da acta d'asta sessão se tirassem duas copias, uma para ser enviada ao seu unico irmão, Antonio Duarte Silva, e outra para ser publicada no Boletim Official da provincia, impetrando-se para isso a previa auctorisação.

A camara, compenetrada do elevado sentimento que dictava as palavras do seu presidente, approvou por acclamação as suas propostas, reservando-se para opportunamente resolver ácerca do monumento destinado a perpetuar a memoria d'um compatriota que tanto honrou a sua patria; e levantou a sessão.

(a) *Joaquim Ignacio Ferreira Nobre, Antão Victorino Ferreira, Antonio José de Lima, João Zacharias de Mello* e *Aurelio Antonio Martins.* O escrivão, *Diocleciano Nobre.*

(*Correio de Portugal*, de 18 de março de 1889).

N.º 11

O testamento de ROBERTO DUARTE SILVA feito em Paris a 22 de abril de 1884

Paris, 4 place de la Sorbonne, le 22 abril 1884.

Mon cher monsieur Friedel et vénéré Maître

J'ai voulu depuis longtemps consigner dans une lettre quelques dispositions devant servir de testament et j'en ai été empêché par mes constantes occupations. Je vais consigner maintenant dans ces lignes que j'écris pour l'Angleterre mes dispositions testamentaires.

Je lègue à Société chimique de Paris:

Tous mes livres, y compris les bibliothèques, aussi le peu de fortune que je possède en valeurs deposées à la Société de Depots et de Comptes Courants, 2 place de l'Opéra à Paris, apres avoir payé:

A M.me Fœrster, la veille femme de ménage qui me sert depuis quelques années, la somme de 1.500 fr.

Et avoir payé une petite dête que j'ai chez mon tailleur Mr. Moovot 28, rue Vivienne, dête, qui provient de ce que je n'ai pu règler mes comptes avec Mr. Moovot, faute de temps pour chercher les reçus d'argent remis.

Aussi une petite dête a Mr. Rabasse, 10, rue des Archives.

Et une petite dête a mes amis de Lisbonne MM. Antonio Feliciano Alves d'Azevedo, Filhos, 31, Praça de D. Pedro.

Je laisse à mon neveu et filleul Roberto Duarte Silva Junior, fils de mon frère Joaquim Duarte Silva, décédé, toutes les petites terres qui me viennent de mon père et de ma mère à l'île Santo Antão, archipel du Cap Vert.

Les objects de menage et mon linge et les quelques meubles seront donnés à M.me Fœrster.

Vous, mon excellent Maître, vous devrez prendre toutes mes petites chinoiseries et donner à mon excellent ami, Mr. de Clermont, deux caisses

de chinoiseries, que me seront expediées de Chine très prochainement, ce pourquoi j'ai envoyé dernièrement environ 200 fr.

A mon ami Grison de la maison Clin & C.ie, je vous prie de donner les deux vases de porcelaine de Chine, qui sont dans ma chambre à coucher et ont des oiseaux.

A mon ami Louis Perrot, l'actuel économe de l'École Centrale une obligation de la Ville de Paris, que j'ai a la Société de Depots et Comptes Courants.

Outre les valeurs qui se trouvent a la Société de Depots, il y a à la Pharmacie Centrale, 7, rue de Joly, pour 2.000 fr. d'actions ou obligations qui m'appartiennent.

Dans le tiroir du cartonnier, qui est tout près de la porte, marque R. D. S., se trouvent des papiers, qui interessent mes affaires; mais il y a la aussi un paquet cacheté contenant des *lettres intimes que personne ne doit lire*. Vous, mon cher Monsieur Friedel et mon excellent ami Mr. de Clermont, vous *brulerez le paquet tel est*.

Voila, mon excellent Maitre, ma volonté et je confie dans votre si grande et paternelle bienveillance de tout faire executer.

Je vous dis adieu, mon vénéré Maitre et a M.me Friedel et vos chers enfants, sans oublier mon jeune ami Jean. Je me rappelle au bon souvenir de tous mes amis, surtout M. et M.me de Clermont, et je prie Dieu de vous conserver et de vous bénir!

Recevez l'expression de la plus vive reconnaissance de votre élève qui vous vénère

(signé) ROBERTO DUARTE SILVA

ou R. D. SILVA.

P. S. Mes signatures se trouvent chez le notaire de la rue Condé et aussi au Consulat général de Portugal.

(signé) R. D. SILVA.

N.º 12

Carta que ROBERTO DUARTE SILVA escreveu a seu irmão Antonio Duarte Silva, em 1 de fevereiro de 1889, oito dias antes da sua morte

Paris, 1.º de fevereiro de 1889.

Meu caro Antonio

Recebi com prazer a tua carta de 6 do mez passado. Agradeço muito a tua attenção.

Estimo que os teus negocios continuem como presentemente. Não te queixes da sorte, pois a residencia de S. Vicente não deve ser nada desagradavel, e és o unico pharmaceutico da ilha. Se quizeres trabalhar, deves ahi viver agradavelmente.

Tenho o pezar de te dizer que estou muito doente ha já 8 mezes e com pouca esperança de me restabelecer: tenho uma terrivel doença do estomago, e, o que é muito peior, o pulmão esquerdo atacado; n'estas condi-

ções preciso em breve dispôr das minhas cousas e fazer o meu testamento.

Para isto preciso que me envies pelo primeiro vapor a lista das terras que me vêm do patrimonio de nossos paes. Desejo saber onde estão situadas, de que são cultivadas, etc., e bem entendido tambem os preços por que forão estimadas e os que representão hoje.

Quem recebe os productos d'estas terras? Não faço estes pedidos, bem entendido, para exigir cousa alguma.

Tenho muita pena do estado de minha saude; porque o meu grande desejo fôra ir passar o resto da minha vida em Santo Antão, n'uma pequena propriedade, que comprasse, bem situada e com uma caza. Lá queria eu ter laranjeiras, alguns pés de café, muita bananeira, papaeira, etc., que me lembrassem uma pequena parte da minha dura mocidade.

Inclino-me deante da vontade de Deus!

Tem saude e os teus e recebe um abraço de

Teu irmão

R. D. Silva.

P. S. Manda-me o mais *breve possivel* a lista que te peço.

N.º 13

Episodio de viagem, com Roberto Duarte Silva, narrado pelo sr. Rangel de Lima

Foi em 1888. Eu acompanhava uma das mais conhecidas familias de Lisboa em viagem pela Hespanha, França e Suissa. Depois de estarmos uma semana em Madrid, fomos d'aquella capital a Bordeus, onde nos deviamos demorar poucos dias, para, em seguida, passarmos uma temporada em Paris e de lá partirmos para Lucerne.

Em Handaya, quando mudámos de comboio, occupámos uma carruagem composta de dois compartimentos, que se communicavam por uma estreita porta. N'um dos compartimentos tomei logar com os pais e a avó de duas meninas: uma que apenas balbuciava raras palavras; outra, dos seus dez ou doze annos, muito sagaz, muito intelligente, fallando já com facilidade algumas linguas estrangeiras. No compartimento contiguo ao nosso iam as duas meninas — a mais nova acompanhada por uma criada antiga da casa, a mais velha por uma *instutrice* allemã, bastante instruida, fallando tambem as principaes linguas vivas.

Chegado o comboio a Biarritz, entrou no compartimento em que viajavam as meninas um homem já certa idade. Do meu logar vi-o assentar-se em frente da menina mais velha e da mestra.

Confesso que estranhei o todo um tanto original d'aquelle viajante. Completamente vestido de preto — ampla sobrecazaca, laço de seda, chapeu alto e luvas de pellica — o seu rosto, em que transparecia, é certo, uma tal ou qual expressão de bondade e bonhomia attrahente, offerecia, comtudo, um verdadeiro contraste com o dos viajantes que, de ordinario, se encontram n'aquellas paragens. De uma côr baça, olhar meigo, nariz um tanto achatado, bigode de guias compridas e cahidas, não parecia um europeu. O fato preto que trajava e o chapeu alto a occultar-lhe uma cabelleira basta e

toda annelada, como depois se viu, tornavam a sua physionomia ainda mais soturna, dando-lhe ares de um funccionario indigena de qualquer provincia ultramarina.

Á menina mais velha da já citada familia não passou despercebido o estranho aspecto do recem-chegado; pelo que, depois de o mirar e remirar, voltando-se para a *institutrice* que parecia ter ficado, como a discipula, tambem impressionada pela presença do novo companheiro de viagem, disse-lhe, em inglez, com a desculpavel imprudencia de uma creança:

— Parece um chinez de luto, vestido á europea. É a primeira vez que vejo um homem assim!

A mestra sorriu-se e não respondeu; mas no seu sorriso mostrou concordar plenamente com a opinião da discipula.

O nosso homem, impassivel, conservando o seu ar bondoso, tira, momentos depois, do bolso da sobrecasaca uma charuteira, da charuteira um charuto, e, dirigindo-se com a mais perfeita cortezia á menina e á mestra pergunta-lhes, em correctissimo inglez, se as não incommoda o fumo do charuto.

A perturbação das duas foi de tal ordem que não se atreveram a responder ao seu interlocutor. Apenas a menina, vexadissima, teve animo para dizer á mestra, em allemão:

— Então o chinez de luto não se me sáe a fallar inglez como um inglez!

E o chinez de luto que falava inglez como um inglez, vendo que as duas não respondiam á sua pergunta, observa-lhes em puro allemão:

— Visto que não se oppõem, accenderei o meu charuto.

O assombro da pobre menina ao ouvir aquellas palavras foi ainda maior que o da mestra. Fez-se de mil cores, e tão perturbada ficou por um momento, que a criada que acompanhava a irmã mais nova correu pressurosa para ella, julgando que lhe ia dar alguma coisa.

A menina, porém, cobrando novamente animo, disse á creada, que era portugueza e não fallava outra lingua senão a sua:

— Não é nada, Conceição, não te assustes. Succede-me com este homem uma coisa... Logo te contarei.

N'isto, o comboio pára na estação de Bayonna.

Eu, percebendo que se passava o que quer que fosse de extraordinario no compartimento vizinho, levantei-me do meu logar para ir saber o que era.

O singular viajante levantou-se tambem; e, tirando da carteira um bilhete de visita, entregou-m'o, dizendo em bom portuguez:

«Peço desculpa se dei motivo, embora involuntario, a qualquer semsaboria: mas, cessando a causa, cessa o effeito. Eu apeio-me n'esta estação».

E, descobrindo-se respeitosamente, saiu tão apressado que nem sequer me deu tempo a trocar com elle duas palavras.

Dominado pela maior curiosidade, leio o cartão de visita, e n'elle vejo gravado um nome que não me era estranho: o do celebre professor de chimica em Paris, ROBERTO DUARTE SILVA.

Tinha idéa, e não me enganava, conforme depois verifiquei, de que este nosso compatriota era um dos mais illustres ornamentos do professorado francez. Natural da ilha de Santo Antão, archipelago de Cabo Verde, foi em 1863 para França, onde publicou varios livros, alguns dos quaes a Academia das Sciencias de Paris premiou. Apesar de estrangeiro, obteve em 1867 a alta distincção de ser eleito presidente da Sociedade de Chimica d'aquella capital.

Em 1889, os jornaes de Lisboa annunciavam a sua morte, occorrida em 9 de fevereiro, e descreviam o funeral do illustre sabio, ao qual assistiram as summidades do professorado e da sciencia de Paris.

A triste nova trouxe-me á memoria o episodio de viagem do anno anterior, que deixo aqui relatado com a mesma simplicidade com que então me foi referido pela sympathica menina que lhe dera origem, e é hoje uma senhora casada das mais illustradas da nossa primeira sociedade.

Julho de 1904.

RANGEL DE LIMA.

(*Revista litteraria, scientifica e artistica d'«O Seculo»*, de 8 de agosto de 1904).

Tumulo de ROBERTO DUARTE SILVA
no cemiterio de Mont-parnasse

Um autographo de Roberto Duarte Silva

por que diz respeito a Portugal.

Desculpa a extensão e ao mesmo tempo o laconismo!

Creia-me V. Ex.a, com o mais sincero respeito e respeitosa affeição

De V. Ex.a

Obrig.mo Amigo

5 Janeiro — R. D. Silva

P. S. Por uma circunstancia independente da minha vontade, esta carta esteve uns poucos de dias sem ser lançada no correio. Faço esta observação para que não pareça extraordinaria a demora e cordialidade. R. D. Silva

BIBLIOGRAPHIA

Ch. Lucas de Pesloüan: — *N. H. Abel. Sa vie et son œuvre.* Paris. Gauthier-Villars, 1906.

Téem sido consagrados diversos escriptos á biographia e á analyse dos trabalhos de Abel, o glorioso geometra norueguez, que tão rapidamente passou por este mundo, mas que deixou nelle um brilhante rasto luminoso que jámais se apagará. O livro que vem de publicar sobre a sua vida e a sua obra scientifica o sr. Lucas de Pesloüan distingue-se porém dos trabalhos anteriores sobre o mesmo assumpto: na parte consagrada á sua vida, pela sua bella forma litteraria, que tem os encantos de um romance, quando narra a vida d'este joven pobrissimo e debil, e só rico de talento, que morreu antes de conseguir realisar as suas aspirações de ser professor em uma Universidade e arranjar assim recursos para alimentar a sua infeliz familia e transformar em esposa a noiva que tinha escolhido, e precisamente no momento em que os seus desejos iam ser satisfeitos e em que os seus trabalhos principiavam a ser apreciados pelos maiores geometras do seu tempo; e, na parte consagrada á sua obra, pelo modo como é nelle examinada a evolução das ideias do grande geometra, principalmente a respeito dos assumptos da theoria geral das equações e da theoria das funcções transcendentes, até á publicação das geniaes descobertas que a este respeito fez.

G. T.

Roberto Bonola: *La geometria non-euclidea.* Bologna, 1906.

N'este trabalho interessante expõe o seu sabio auctor de um modo simples, preciso e muito completo as ideias dos diversos

geometras que se teem occupado do postulado de EUCLIDES que serve de base á theoria das parallelas.

Procuraram muitos geametras demonstrar este postulado ou fundar a theoria das parallelas em base mais evidente. O sr. BONOLA no capitulo 1.º do seu livro dá noticia e faz a critica das tentativas que n'este sentido foram feitas primeiramente na antiguidade, as quaes constam do commentaria de PROCLO á obra de EUCLIDES, depois entre os arabes e finalmente na Europa nos seculos XVI e XVII. Depois expõe, no capitulo 2.º, as ideias dos precursores da Geometria não euclideana, SACCHERI, LAMBERT e LEGENDRE, Os capitulos 3.º e 4.º são consagrados á exposição e critica dos trabalhos de GAUSS, SCHEWEIKART, TAURINUS, LOBACEFSKY e BOLYAI, que fundaram a constituiram a Geometria não euclideana. Vem depois no capitulo 5.º noticia dos trabalhos que mais concorreram para o desenvolvimento d'esta Geometria, em especial dos trabalhos de RIEMANN, HELMHOLTZ e CAYLEY.

Terminam a obra duas notas interessantes em que se trata das relações entre o postulado de EUCLIDES considerado e os principios fundamentaes de Statica, e em que são expostos de um modo elementar as importantes indagações de CLIFFORD sobre a theoria das parallelas.

G. T.

ANTONIO AURELIO DA COSTA FERREIRA: *Craneos portuguêses*. III. Capacidade. (Separata do *Instituto*). Coimbra, Imprensa da Universidade, 1906.

Neste volume reuniu o sr. COSTA FERREIRA a serie de artigos que nos ultimos annos tem publicado no *Instituto*, ácerca da capacidade craneana. Com este trabalho, que vem juntar-se aos que anteriormente escreveu sobre o *Pterion* e *Suturas*, completa o auctor, ao menos por agora, os seus estudos de craneometria portuguêsa.

Dotado de excellentes qualidades de observador e d'uma grande vontade de ser util, o sr. COSTA FERREIRA tem conquistado entre nós o apreço de todos os que se interessam pelos estudos da anthropometria e, em particular, do problema ethnico

da nossa população. Se é certo que as conclusões que nos apresenta são por vezes pouco fundamentadas, attento o pequeno numero de casos observados de que são deduzidas, não é menos verdade que os trabalhos do sr. Costa Ferreira são d'aquelles que ficam, e que ninguem poderá deixar de ter em conta na elaboração de quaesquer estudos posteriores sobre o assumpto.

D'entre os capitulos do volume a que nos estamos referindo, destacaremos pelo seu interesse os que se referem á variação da capacidade craneana com a estatura e com o indice cephalico, e ás variações sexuaes e ethnicas da capacidade, alguns dos quaes, como outros que por brevidade não citamos, foram apresentados á *Sociedade de Anthropologia de Paris*, em cujos *Boletins* e *Memorias* foram resumidos e discutidos.

Que a nova orientação de estudos do sr. Costa Ferreira o não afaste inteiramente dos seus predilectos trabalhos de anthropometria, é o voto que sinceramente formulamos.

S. P.

Carlos E. Porter: *Breves instrucciones para la recoleccion de objectos de Historia Natural*. Valparaiso, Imp. Gillet, 2.ª ed. 1903.

Este pequeno manual, publicado com o intuito de tornar conhecidos dos officiaes de marinha do Chili processos praticos para a colheita de exemplares de Historia Natural, é de grande utilidade para todas as pessoas que queiram dedicar-se á organisação de collecções, ou prestar o seu concurso aos estabelecimentos scientificos onde seja cultivada a Historia Natural.

Necessariamente semelhante aos trabalhos do mesmo genero publicados nos outros paizes, o opusculo a que nos estamos referindo tem todavia bastante originalidede pela abundancia de informações relativas a especies chilenas e pelas observações pessoaes do seu auctor, o illustrado director do *Museo de Historia Natural de Valparaiso* e da *Revista Chilena de Historia Natural*.

Começando pelas instrucções relativas á colheita de exemplares de zoologia, que occupam a maior parte do opusculo, dedica ainda a auctor os ultimos capitulos á botanica, mineralogia e geologia.

S. P.

ERRATA

Pagina	Linha	Erro	Emenda
18	2	$\mu(\nu)$	$\Gamma(\nu)$
24	14	. $(n + 2s)$	$\binom{n + 2s}{s}$
195	13	cathodicos	uranicos
195	25	Pelé e	Pelée

INDEX

Pag.

F. Gomes Teixeira: Sobre uma questão entre Monteiro da Rocha e Anastacio da Cunha 7

Niels Nielsen: Sur les séries neumanniennes de fonctions sphériques 17

A. J. Ferreira da Silva: A obra scientifica e a vida do chimico portuguez Roberto Duarte Silva 33, 99, 163, 229

Bento Carqueja: O capitalismo e as suas origens em Portugal..... 69

E. Jahnke: Sur une transformation d'une classe d'équations différentielles binômes 69

J. B. d'Almeida Arez: Nota sobre os coefficientes das formulas de Waring 77

P. H. Schoute: Application d'un théorème connu sur la multiplication de deux matrices à la géométrie polydimensionale 83

H. Moissan: Conférence faite au Museum de Paris, à l'occasion de la visite de S. M. le Roi de Portugal D. Carlos I 87

José R. Carracido: Formation natural de la hemoglobina.......... 91

J. Neuberg: Sur quelques complexes de droites.................. 137

G. Lazzeri: Gli aggrupamenti prosppetivi di ordine n e speccie $p+1$ 151

Haton de la Goupillière: Centre de gravité du temps de parcours 201

Bibliographia.. 133, 194, 259